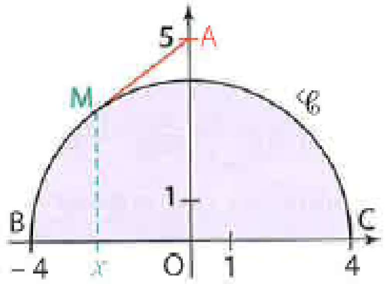
Problèmes d'optimisation - Exercices

1 (Distance AM)

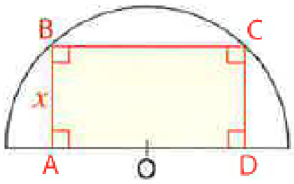
Dans le repère orthonormé ci-dessous, on a tracé le demi-cercle $\mathcal{C}$ de centre O (l'origine du repère) et de rayon 4. Le point A a pour coordonnées $A(0;5)$. M est le point « variable » d'abscisse x du demi-cercle $\mathcal{C}$ avec $-4 \leq x \leq 4$. On définit alors une fonction f en posant $f(x) = AM$



Réaliser le tableau de variation de la fonction f.

2 (Hangar)

Dans un hangar de forme semi-circulaire de 10 m de long, on souhaite intégrer une pièce de forme rectangulaire de volume maximal. Pour cela, on a représenté sur la figure suivante, une vue de face du hangar :



$ABCD$ est un rectangle inscrit dans le demi-cercle de centre O et de rayon $6\,m$. Ses côtés ont des longueurs variables et on note x la longueur AB. On note alors $A(x)$ l'aire du rectangle $ABCD$.

1) a. Dans quel intervalle varie x ?
   b. Justifier que $OA^2 + x^2 = 36$
   c. En déduire l'expression de OA puis de AD en fonction de x
   d. Exprimer $A(x)$ en fonction de x.
2) a. A l'aide de la calculatrice, tracer la courbe représentative de la fonction A. On pourra utiliser la fenêtre suivante :
   $Xmin = 0;\ Xmax = 6;\ Ymin = 0;\ Ymax = 50$
   b. A l'aide de la fonction $TRACE$, lire le maximum de la fonction A ainsi que la valeur en laquelle il est atteint
3) Conclure sur les dimensions de la pièce permettant d'obtenir un volume maximal.

3 (Boite sans couvercle)

La problématique de l'exercice est la suivante : A l'aide d'un simple feuille A4, comment construire une boite sans couvercle (voir *Figure 1*) de volume maximale ? Le patron d'une telle boite est obtenue en découpant 4 coins de même dimension sur la feuille A4 (voir *Figure 2*). En fonction de la taille x du coin découpé on obtiendra une boite de volume différente.

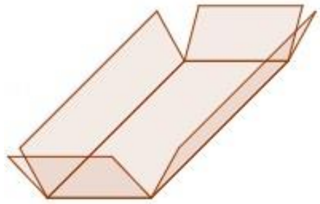


Figure 1

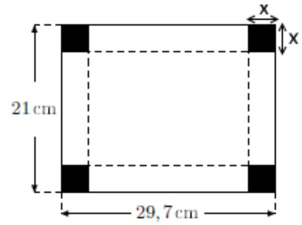
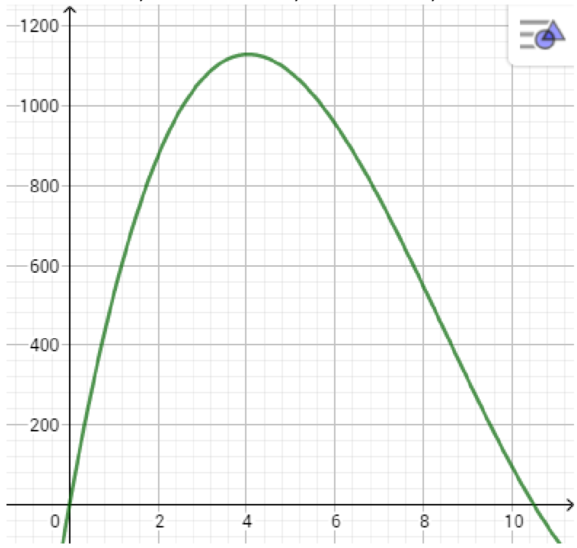


Figure 2

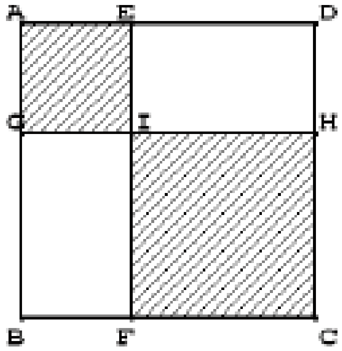
1) On note $V(x)$ le volume de la boite obtenue en découpant un coin de x cm.
   a. Calculer $V(1)$ et $V(5)$.
   b. Quel est l'ensemble de définition de la fonction V ?
   c. Exprimer $V(x)$ en fonction de x puis montrer que
   $V(x) = 4x^3 - 101{,}4x^2 + 623{,}7x$
2) A l'aide de la calculatrice, tracer la courbe représentative de la fonction V. On pourra utiliser la fenêtre suivante :
   $Xmin = 0; Xmax = 12; Ymin = 0; Ymax = 1500$



3) A l'aide de la fonction $TRACE$, lire le maximum de la fonction A ainsi que la valeur en laquelle il est atteint.
4) a. Conclure sur les dimensions de la boite, permettant d'obtenir un volume maximal.
   b. Est-il possible de construire une boite d'exactement $1L$?

4 (Aire hachurée)

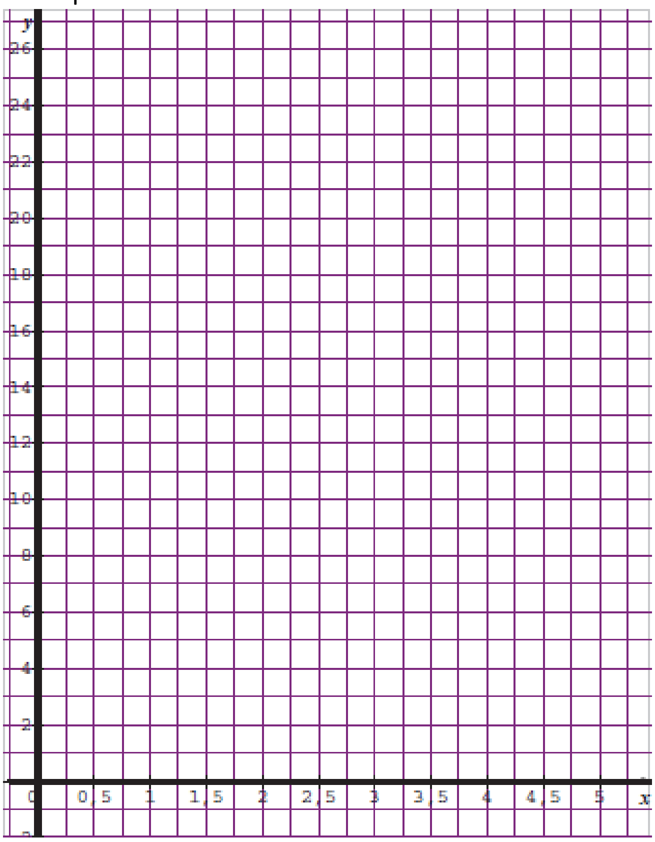
$ABCD$ est un carré de côté 5 cm. E est un point du segment $[AD]$. G est le point du segment $[AB]$ tel que $AE = AG$. La parallèle à (AB) passant par E coupe $[BC]$ en F. La parallèle à (AD) passant par G coupe $[DC]$ en H. (GH) et (EF) se coupent en I. (voir figure ci dessous) On va étudier l'aire (notée $A(x)$) de la partie hachurée lorsque E se déplace sur $[AD]$. On pose $AE = x$



1) a. Quelles sont les valeurs possibles de x ?
   b. Exprimer en fonction de x la longueur IH.
   c. Calculer l'aire de la partie hachurée et vérifier que l'aire hachurée s'exprime par
   $$A(x) = 2x^2 - 10x + 25$$
2) a. Compléter à l'aide la calculatrice le tableau de valeurs suivant :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$A(x)$											

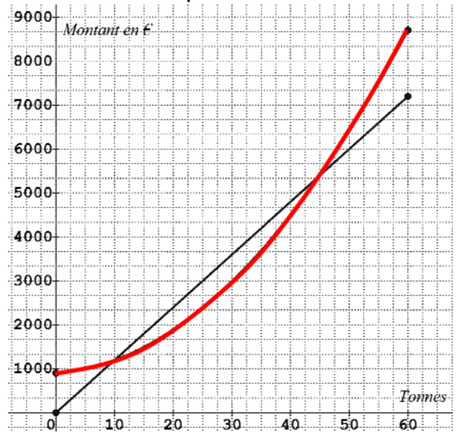
   b. Dans le repère ci-dessous, tracer la courbe représentative de la fonction A.



3) a. Pour quelle valeur de x l'aire est-elle minimale ? Combien vaut cette aire minimale ?
   b. Construire la figure pour cette valeur.

5 (Bénéfice)

Une entreprise produit de la farine de blé, x est le nombre de tonnes fabriquées avec $0 \leq x \leq 60$. Le prix de vente d'une tonne de farine est 120€. Le coût de production de la fabrication de x tonnes de farine, exprimé en euros, est donnée par $C(x) = 2x^2 + 10x + 900$. Le graphique ci-dessous donne la courbe représentant le coût de production et celle représentant la recette.

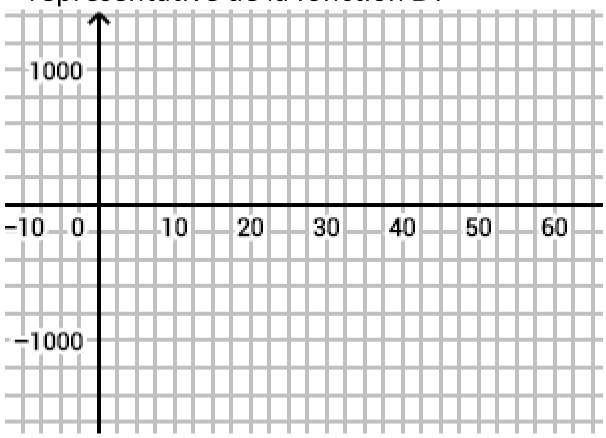


1) Déterminer graphiquement puis par le calcul le bénéfice réalisé pour 30 T de farine produites.
2) a. Exprimer, en fonction de x, la recette $R(x)$ de l'entreprise pour x tonnes vendues.
   b. En déduire, en fonction de x, le bénéfice $B(x)$ de l'entreprise pour x tonnes vendues.
3) a. A l'aide de la calculatrice compléter les tableaux de valeurs suivants :

x	0	10	20	30	40	50	60
$B(x)$							

x	20	22.5	25	27.5	30
$B(x)$					

   b. Dans le repère suivant, tracer la courbe représentative de la fonction B.



4) A l'aide du graphique précédent déterminer
   a. la quantité de farine à produire pour que l'activité de l'entreprise soit rentable.
   b. la quantité de farine à produire pour que le bénéfice de l'entreprise soit maximal.
   c. La valeur de ce bénéfice maximal.
5) Retrouver ces résultats avec le 1er graphique.