Fiche N1.3 : Puissances

1 – Puissance d'un nombre réel

Définition 1 : Soit a un nombre réel, et n un entier naturel non nul.

- Le nombre a^n (qui se lit « a **puissance** n ») est défini par le produit $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n-fois}$.
- Si $a \neq 0$ alors le nombre a^{-n} est défini par $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Exemple 1 :

- $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$
- $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{5\times5} = \frac{1}{25} = 0.04$

Remarques :

- Par convention, pour tout nombre réel a, $a^0 = 1$.
- Si n est un entier naturel alors $0^n = 0$ et 0^{-n} n'est pas défini : $0^{-n} = \frac{1}{0^n} = \frac{1}{0}$ ce qui n'existe pas.
- Pour tout réel a on a $a^1 = a$ et pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ on a $1^n = 1$.
- Si n est un entier naturel alors $10^n = 1\underbrace{00\ldots0}_{n\,zéros}$ et $10^{-n} = \underbrace{0{,}0\ldots01}_{n\,zéros}$.
- En programmation on utilise souvent le symbole « ^ » pour écrire les puissances : a^n s'écrit « a^n ».

Exemple 2 :

- $10^0 = 1$
- $10^1 = 10$
- $10^9 = 1\,000\,000\,000 = 1\ Milliard$
- $10^{-6} = 0.000001 = 1\ Millionième$

Propriété 1 : Soient a un nombre réel, et n et p deux entiers relatifs.

- $a^n \times a^p = a^{n+p}$
- $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$
- $(a^n)^p = a^{n\times p}$
- $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

Remarque : $(a^n)^p \neq a^{n^p}$.

Exemple 3 :

- $2^5 \times 2^3 = 2^{5+3} = 2^8 = 256$
- $\frac{3^{15}}{3^{11}} = 3^4 = 81$
- $(10^3)^2 = 10^6$ mais $(10^3)^2 \neq 10^{3^2} = 10^9$
- $\frac{1}{10^{-3}} = 10^{-(-3)} = 10^3 = 1\,000$

Propriété 2 : Soient a et b deux nombres réels, et n un entier naturel.

- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Exemple 4 :

- $(4 \times 10)^3 = 4^3 \times 10^3 = 64 \times 1\,000 = 64\,000$
- $\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{3^2}{7^2} = \frac{9}{49}$

Remarque : $(a+b)^n \neq a^n + b^n$ et $(a-b)^n \neq a^n - b^n$.

Exemple 4 : Pour calculer $(a+b)^2$ et $(a-b)^2$ on utilise les identités remarquables :

• $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

• $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

2 – Ecriture scientifique

Lorsque que l'on doit écrire des très grands ou des très petits nombre on utilise les puissances de 10 pour faciliter l'écriture de ces nombres :

Définition 2 : Soit x un nombre décimal. Son **écriture scientifique** est sous la forme $x = a \times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$ et n un entier relatif.

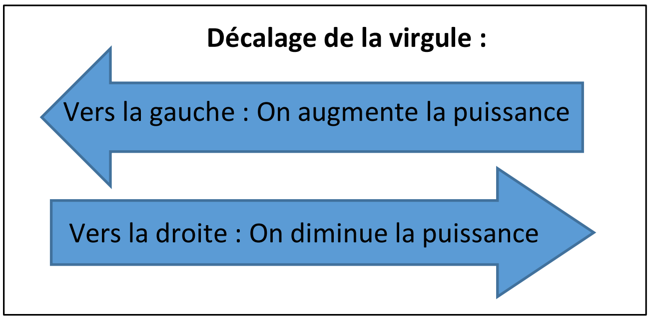
Exemple 5 :

• $300\,000\,000 = 3 \times 10^9$

• $0.000045 = 4.5 \times 10^{-5}$

• $525 \times 10^{15} = 5.25 \times 10^{17}$

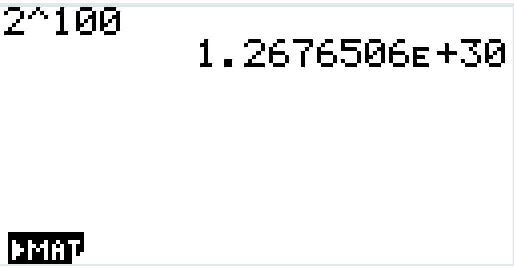
• $0.37 \times 10^{10} = 3.7 \times 10^9$



Remarque : Il existe également une variante plus compacte, avec la lettre E (pour exposant), pour la notation scientifique : $a\ E\ n$ signifie $a \times 10^n$. C'est le format généralement utilisé par les calculatrices.

Exemple 6 : Avec la calculatrice, donner l'écriture scientifique (3 chiffres significatifs) des nombres suivants :

• $2^{100} \approx 1.27 \times 10^{30}$



• $\sin(3.15) \approx -8.41 \times 10^{-3}$