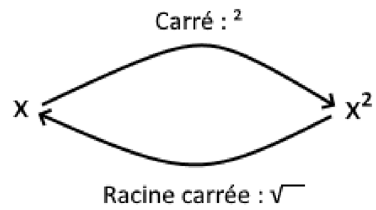
Fiche N1.4 : Racines carrés

1 – Définition

Définition 1 : Soit x un nombre réel positif ou nul alors la **racine carrée** de x, notée $\sqrt{x}$, est l'unique nombre réel positif ou nul dont le carré vaut x.

Remarques :

- La racine carré est **l'opération réciproque** du carré.
- La racine carré d'un nombre négatif n'est pas définie :
  En effet, un carré est toujours positif.



Exemple 1 :

- $2^2 = 4$ donc $\sqrt{4} = 2$
- $5^2 = 25$ donc $\sqrt{25} = 5$
- $\sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{1} = 1$.

2 – Propriétés algébriques

Propriété 1 :

- Pour tout nombre réel x positif ou nul on a $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$
- Pour tout nombre réel a, on a $\sqrt{a^2} = |a|$

Exemple 2 : $\left(\sqrt{8}\right)^2 =$ ____ ; $\sqrt{50^2} =$ ____ ; $\sqrt{(-10)^2} =$ _____

Propriété 2 : Pour tous nombres réels a et b positifs ou nul on a :

$(1)\ \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ $\quad$ $(2)\ \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (avec $b \neq 0$)

Exemple 3 : (1) : $\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$ $\quad$ (2) : $\sqrt{0.25} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} = 0.5$

Démonstration : Soient a et b deux nombres réels positifs (avec $b \neq 0$ pour le (2)).

(1) • Calculons le carré de $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$: $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \times \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \times b$

• Calculons le carré de $\sqrt{a \times b}$: $\left(\sqrt{a \times b}\right)^2 = a \times b$

• On a l'égalité des carrés. Comme $\sqrt{a \times b}$ et $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ sont positifs, on a[1] $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

(2) • Calculons le carré de $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$: $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$

• Calculons le carré de $\sqrt{\frac{a}{b}}$: $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$

• On a l'égalité des carrés. Comme $\sqrt{\frac{a}{b}}$ et $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ sont positifs, on a[1] $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ □

Remarque : Il est parfois utile de simplifier les racines carrés sous la forme $a\sqrt{b}$ avec b le plus petit possible.

---

[1] Soient x et y sont deux nombres positifs alors $x^2 = y^2$ implique $x = y$:
En effet, $x^2 = y^2$ implique $\sqrt{x^2} = \sqrt{y^2}$ (on applique la $\sqrt{\ }$) implique $|x| = |y|$ (d'après propriété 1) implique $x = y$ (car $x, y > 0$).

Exemple 4 : $\sqrt{180} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 5} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{5} = 2 \times 3 \times \sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

Propriété 3 : Pour tous nombres réels a et b positifs ou nul on a :

$$\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Exemple 5 : $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$ donc $\sqrt{9+16} < \sqrt{9} + \sqrt{16}$

Démonstration : Soient a et b deux nombres réels positifs.

- Calculons le carré de $\sqrt{a+b}$: $\left(\sqrt{a+b}\right)^2 = a + b$.
- Calculons le carré de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$: $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 + 2 \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$.
- Comme $2\sqrt{ab}$ est positif on obtient l'inégalité avec les carrés : $\left(\sqrt{a+b}\right)^2 < (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$.
- Mais comme $\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ sont positifs, on obtient[2] l'inégalité souhaitée : $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$. □

[2] Soient x et y sont deux nombres positifs alors $x^2 < y^2$ est équivalent à $x < y$:
En effet, $x^2 < y^2$ est équivalent à $x^2 - y^2 < 0$ qui est équivalent à $(x+y)(x-y) < 0$ (d'après la 3ème identité remarquable) qui est équivalente à $x - y < 0$ car comme x et y sont positifs $x + y > 0$. (Un produit est négatif si l'un des facteurs est négatif)
Or, $x - y < 0$ est équivalent à $x < y$ ce qui démontre l'affirmation.