Equation-Inéquation Produit-Quotient - Exercices

Produit

1 (Equation)

Résoudre les équations suivantes :

a. $(3+x)(5-x)=0$

b. $(2x-1)(3x+4)=0$

c. $x\left(\frac{1}{2}x-5\right)=0$

d. $x^2(1-4x)=0$

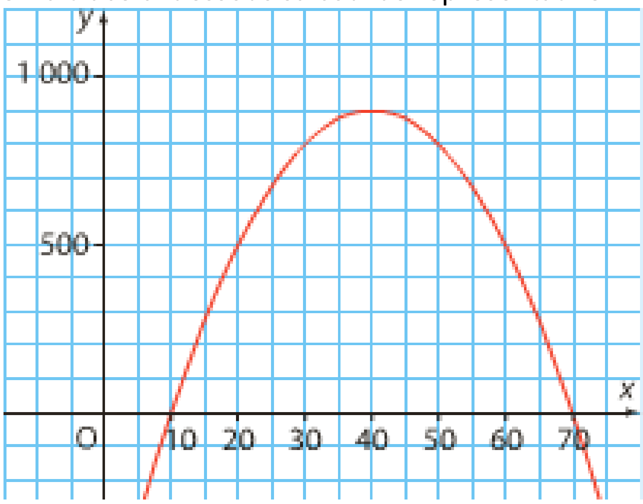
e. $(3x+9)^2=0$

2 (Fonction Produit)

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x)=(10-x)(x-70)$$

On a tracé ci-dessous sa courbe représentative.



Déterminer graphiquement, puis par le calcul :

a. Les antécédent(s) de 0 par h.

b. Le tableau de signe de la fonction h.

3 (Tableau de signe)

Réaliser le tableau de signe des fonctions suivantes puis vérifier à la calculatrice.

a. $f(x)=(3x-2)(4x+1)$

b. $f(x)=(3-7x)(x-6)$

c. $f(x)=(-x-2)(2-\frac{x}{3})$

d. $f(x)=x^2(-8x+12)$

e. $f(x)=-3(x-1)(x+2)$

f. $f(x)=(5x+1)^2$

4 (Inéquation)

Résoudre les inéquations suivantes (on donnera l'ensemble des solutions) :

a. $(5x-1)(-2x+1)>0$

b. $(-3x-7)(2x-5)\leq 0$

c. $\left(x-\frac{1}{2}\right)(2-10x)>0$

d. $-(x+1)(6-3x)\geq 0$

e. $x(x+1)(x-1)<0$

5 (Fonction infernale)

On considère la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$k(x)=(x-1)(x-2)\ldots(x-2018)$$

1) Quel(s) sont les antécédents de 0 par f.
2) Déterminer le signe des nombres suivants :
   a. $k(0)$
   b. $k(2019)$
   c. $k(\sqrt{2})$
   d. $k(999{,}999)$

6 (Trouver une fonction 1)

Dans chacun des cas, proposer une fonction f qui vérifie les conditions suivantes :

a. f s'annule en 1 et -4

b. f s'annule en 0 ; -1 et $\frac{1}{2}$

c. f s'annule en -3 et 5 et est positive entre -3 et 5.

d. f coupe 4 fois l'axe des abscisses entre 0 et 1.

7 (Trouver une fonction 2)

Dans chacun des cas, proposer une fonction f à coefficients entier qui vérifie les conditions suivantes :

a. f s'annule en $\frac{4}{3}$ et $-\frac{2}{5}$.

b. f s'annule en $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$

c. f s'annule en $2\sqrt{5}$ et $-2\sqrt{5}$

d. f s'annule en $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

e. f s'annule en $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (Le nombre d'or)

Remarque : Il n'existe pas de fonction polynôme f à coefficients entiers qui s'annule en π. On dit que π est un nombre **transcendant.**

8 (Trouver une fonction 3)

Proposer une fonction f qui ne s'annule jamais.

9 (Factorisation)

Factoriser les expressions suivantes, puis réaliser le tableau de signe de ces expressions.

a. $A(x)=x^2-2x$

b. $A(x)=x^2-1$

c. $A(x)=(x+1)-x(x+1)$

d. $A(x)=(x+2)^2-16$

e. $A(x)=(2x+3)^2-(x-1)^2$

Rappel : Pour tout nombre a et b on a l'identité remarquable :

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

Quotient

10 (Equation)

Résoudre les équations suivantes :

a. $\frac{6+2x}{2-x} = 0$

b. $\frac{x-5}{15-3x} = 0$

c. $\frac{2x+9}{5x} = -1$

d. $\frac{1}{3x+4} = 2$

e. $\frac{6x+1}{3x-2} = \frac{2x+5}{x-3}$

11 (Tableau de signe)

Dans chacun des cas réaliser le tableau de signe de l'expression $A(x)$ en précisant les valeurs de x qui annulent le dénominateur :

f. $A(x) = \frac{5+2x}{3-7x}$

g. $A(x) = \frac{4-x}{x(x+2)}$

h. $A(x) = \frac{2x-5}{(x-2)^2}$

12 (Inéquation)

Résoudre les équations suivantes (on donnera l'ensemble des solutions) :

a. $\frac{3x+2}{x-5} \geq 0$

b. $\frac{4-7x}{2x+1} \geq 0$

c. $\frac{3x+7}{3x+5} < 0$

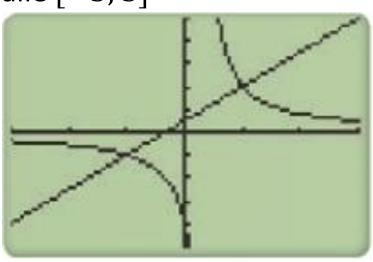
13 (Deux fonctions)

On considère les fonctions f et g définies par :

$f(x) = \frac{4}{3x-1}$ pour $x \neq \frac{1}{3}$.

$g(x) = \frac{3x+1}{2}$ pour tout nombre réel x.

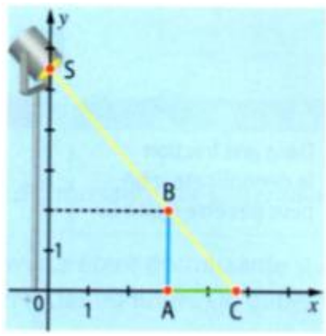
La vue d'écran ci-dessous donne les représentations graphiques de ces deux fonctions sur l'intervalle $[-3; 3]$



1) Identifier à quelle fonction correspond chaque courbe. Justifier votre réponse.
2) Résolvez graphiquement $f(x) = g(x)$.
3) Résolvez algébriquement cette équation.

14 (Une zone d'ombre)

Pour son nouveau film, un réalisateur fait construire un mur de $2\,m$ de haut qu'il veut éclairer sur toute sa hauteur. Il place un projecteur au sommet d'un mât télescopique, situé à $3\,m$ du mur, et de hauteur variable pouvant aller jusqu'à $10\,m$. Sur la figure ci-contre, le projecteur est représenté par le point S, le mur par le segment $[AB]$ et l'ombre par le segment $[AC]$.



1) a. Comment évolue la longueur de l'ombre en fonction de la hauteur du projecteur ?
   b. Que se passe-t-il lorsque le projecteur se trouve à hauteur du mur ?
2) Soit f la fonction qui, à la hauteur x du projecteur, associe la longueur de l'ombre correspondante.
   a. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
   b. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
   c. Dans le repère ci-dessous, tracer la courbe représentative de la fonction f.
3) A quelle hauteur faut-il placer le projecteur pour avoir une ombre de longueur $5\,m$?

x	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$