Fiche F2.1 : Résolution algébrique d'une équation/inéquation

1 – La notion d'équation/inéquation

Définition 1 :

- Une **équation/inéquation** est une égalité/inégalité avec une **inconnue**.
- Une **solution** de l'équation/inéquation est une valeur de l'inconnue qui rend l'égalité/inégalité vraie.
- **Résoudre** une équation/inéquation, c'est trouver toutes les solutions de cette équation/inéquation.

Remarques :

- Une équation peut avoir une, plusieurs ou aucune solution(s).
- Une inéquation peut avoir une infinité de solutions. On utilisera alors un intervalle pour écrire les solutions.

Exemple 1 :

- $x^2 = 2x$ est une équation d'inconnue 'x'. 2 est une solution de cette équation car $2^2 = 4 = 2 \times 2$.
- $t - 5 \geq 0$ est une inéquation d'inconnue 't'. Les nombres supérieurs à 5 sont solution : $6 - 5 = 1 \geq 0$.
  L'ensemble des solutions est donc donné par l'intervalle $S = [5; +\infty[$.

2 – Résolution d'une équation

Définition 2 : Deux équations/inéquations sont dites **équivalentes** si elles ont les mêmes solutions.

Propriété 1 : Si on effectue la même opération* sur les deux membres d'une équation on obtient une équation équivalente.

* Il n'est pas possible de « multiplier ou diviser par 0 » une équation.

Principe de la balance

$3x + 8 = 26$

$\Leftrightarrow 3x + 8 - 8 = 26 - 8$ On enlève 8 des deux côtés.

$\Leftrightarrow 3x = 18$

$\Leftrightarrow \frac{3x}{3} = \frac{18}{3}$ On divise par 3 des deux côtés.

$\Leftrightarrow x = 6$

Méthode : Pour résoudre une équation du premier degré, on **isole** l'inconnu 'x'.

Exemple 2 : Résoudre les équations suivantes :

- $3x + 6 = 12$

$\Leftrightarrow 3x = 12 - 6 = 6$

$\Leftrightarrow x = \frac{6}{3} = 2$

$\boxed{S = \{2\}}$

- $-2x + 8 = 6$

$\Leftrightarrow -2x = 6 - 8 = -2$

$\Leftrightarrow x = \frac{-2}{-2} = \frac{2}{2} = 1$

$\boxed{S = \{1\}}$

- $3x + 5 = 2x + 9$

$\Leftrightarrow 3x - 2x = 9 - 5$

$\Leftrightarrow x = 4$

$\boxed{S = \{4\}}$

- $4 - x = 2x + 7$

$\Leftrightarrow -x - 2x = 7 - 4$

$\Leftrightarrow -3x = 3$

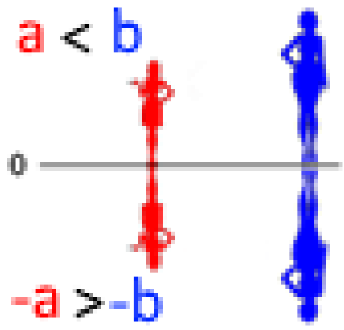
$\Leftrightarrow x = \frac{3}{-3} = -1$

$\boxed{S = \{-1\}}$

$\boxed{3}$ – Résolution d'une inéquation

Le « principe de la balance » s'applique aussi aux inéquations à une exception près :

Propriété 2 : Si on multiplie (ou si on divise) les deux membres d'une inéquation par un même nombre **strictement négatif**, on obtient une inéquation de signe **contraire**.



- $2x < 1$

$\Leftrightarrow \frac{2x}{2} < \frac{1}{2}$ On divise par 2 qui est **positif.** L'inégalité reste dans le **même** sens.

$\Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$

- $-2x < 6$

$\Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} > \frac{6}{-2}$ On divise par -2 qui est **négatif.** L'inégalité est dans le sens **contraire.**

$\Leftrightarrow x > -3$

Exemple 3 : Résoudre les inéquations suivantes :

- $2x - 5 \geq 0$

$\Leftrightarrow 2x \geq 5$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2} = 2.5$

$\boxed{S = [2.5; +\infty[}$

- $-4x + 6 < 0$

$\Leftrightarrow -4x \geq -6$

$\Leftrightarrow x \leq \frac{-6}{-4} = \frac{6}{4} = 1.5$

$\boxed{S =]-\infty; 1.5]}$