

Fiche F2.3 : Système d'équations

1 – Système linéaire de deux équations à deux inconnues

Définition 1 : Un **système linéaire** de deux équations à deux **inconnues** x et y peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \text{ avec } a, a', b, b', c, c' \text{ des nombres réels.}$$

Une **solution** de ce système est un couple $(x; y)$ pour lequel les deux égalités sont vraies simultanément.

Remarque : Un système d'équation peut avoir **une, aucune** ou une **infinité** de solution.

Exemple 1 : $\begin{cases} -x + y = 7 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$ est un système linéaire à deux équations et deux inconnues x et y

Le couple $(\underbrace{-2}_x; \underbrace{5}_y)$ est une solution de ce système : $\begin{cases} -(-2) + 5 = 2 + 5 = 7 \\ 2 \times (-2) + 3 \times 5 = -4 + 15 = 11 \end{cases}$

2 – Méthodes de résolution

a. Méthode de substitution

Exemple 2 : Résoudre le système $\begin{cases} x + 3y = 2 & (1) \\ 2x - 5y = -18 & (2) \end{cases}$

- Etape 1 : Dans une des deux équations, on exprime une des inconnues en fonction de l'autre :

Dans (1), on exprime x en fonction de y : $x + 3y = 2 \Leftrightarrow x = 2 - 3y$

- Etape 2 : On remplace dans l'autre équation puis on résoud pour trouver une des deux inconnues.

Dans (2) : L'équation $2x - 5y = -18$ devient $2(2 - 3y) - 5y = -18$ qui possède une seule inconnue.

On obtient : $4 - 6y - 5y = -18$ puis $-11y = -22$ puis $y = \frac{-22}{-11} = 2$

- Etape 3 : On insère la valeur trouvée dans l'équation initiale pour trouver l'autre solution

Dans (1) : $x + 3y = 2$ devient $x + 3 \times 2 = 2$ c'est-à-dire $x + 6 = 2$ d'où $x = -4$

- Conclusion : Ce système a une solution unique : le couple $(-4; 2)$

b. Méthode de combinaison

Exemple 3 : Résoudre le système $\begin{cases} 2x + 3y = 1 & (1) \\ -4x + 5y = -13 & (2) \end{cases}$

- Etape 1 : On multiplie une des équations pour avoir un nombre opposé de « x » ou de « y » :

On multiplie (1) par 2 : $2x + 3y = 1$ devient $4x + 6y = 2$.

- Etape 2 : On additionne les deux équations pour éliminer une inconnue puis on résoud :

$\begin{cases} 4x + 6y = 2 \\ -4x + 5y = -13 \end{cases}$ devient : $6y + 5y = 2 - 13$ puis $11y = -11$ puis $y = \frac{-11}{11} = -1$.

- Etape 3 : On insère la valeur trouvée dans une des deux équations pour trouver l'autre solution :

Dans (1) : $2x + 3y = 1$ devient $2x + 3 \times (-1) = 1$ c'est-à-dire $2x - 3 = 1$ d'où $2x = 4$ d'où $x = 2$.

- Conclusion : Ce système a une solution unique : le couple $(2; -1)$.



3 – Interprétation graphique : Lien avec les droites du plan

Propriété 1 : On considère les droites $(d): ax + by + c = 0$ et $(d'): a'x + b'y + c' = 0$

On considère le système $S: \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$

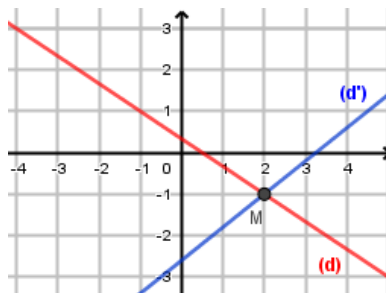
- Les droites (d) et (d') sont sécantes et elles ont un unique point d'intersection M :
Le système S admet alors **une solution unique** : Le couple $(x_M; y_M)$ formé par les coordonnées de M .
- Les droites (d) et (d') sont parallèles et elles n'ont aucun point d'intersection :
Le système S admet alors **aucune** solution.
- Les droites (d) et (d') sont confondues et elles ont une infinité de points en commun :
Le système S admet une **infinité** solution.

Démonstration :

$M \in (d) \cap (d')$ est équivalent à $\begin{cases} M \in (d) \\ M \in (d') \end{cases}$ qui est équivalent à $\begin{cases} ax_M + by_M + c = 0 \\ a'x_M + b'y_M + c' = 0 \end{cases}$ ce qui équivaut à dire que $(x_M; y_M)$ est solution du système S . On en déduit les trois cas présentés ci-dessus. \square

Exemple 4 : D'après l'exemple 3, le système $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -4x + 5y = -13 \end{cases}$ possède une solution unique $(2; -1)$

Les droites $(d): 2x + 3y - 1 = 0$ et $(d'): -4x + 5y + 13 = 0$ se coupent au niveau du point $M(2; -1)$



Exemple 5 : On considère les deux droites $(d): y = 2x + 1$ et $(d'): y = 2x - 3$

(d) et (d') sont parallèles car elles ont le même coefficient directeur : $a = 2$.

Le système $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$ possède aucune solution.

En effet en combinant les deux équations on obtient :

$2x + 1 = 2x - 3$ d'où $1 = -3$ ce qui est impossible.

Exemple 6 : On considère les deux droites $(d): 3x - y = 2$ et $(d'): -6x + 2y = -4$

Considérons le système formé par les deux équations de droites $\begin{cases} 3x - y = 2 & (1) \\ -x + \frac{1}{3}y = \frac{2}{3} & (2) \end{cases}$

En multipliant l'équation (2) par -3 , on tombe sur l'équation (1) et le système devient $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

En combinant les deux équations on obtient : $0 = 0$

Le système a donc une infinité de solutions et les deux droites sont confondues.

Les solutions du système sont tous les couples $(x; y)$ qui vérifient la relation $3x - y = 2$

Ce sont tous les couples formés par les coordonnées des points qui appartiennent à la droite (d) .

