Fiche F3.1 : Fonctions affines

1 – Généralités

Définition 1 : On appelle **fonction affine** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax + b$, où a et b sont des nombres réels.

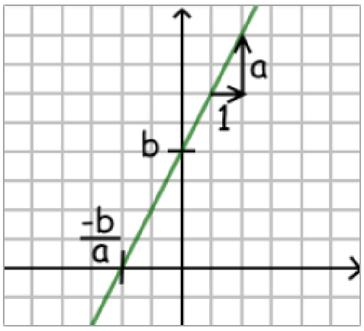
Cas particuliers :

- Si $b = 0$, c'est-à-dire $f(x) = ax$, on dit que f est une fonction **linéaire**.
- Si $a = 0$, c'est-à-dire $f(x) = b$, on dit que f est une fonction **constante**.

Théorème 1 : Dans un repère la courbe représentative d'une fonction affine $f(x) = ax + b$ est une **droite**. Cette droite a pour équation $y = ax + b$.

Interprétation graphique :

- a est appelée le coefficient directeur.
  Il correspond à la pente de la droite qui représente f.
- b est appelée l'ordonnée à l'origine.
  La droite coupe l'axe des ordonnées en b. C'est l'image de 0 par f.
- La droite coupe l'axe des abscisses en $-\frac{b}{a}$. C'est l'antécédent de 0 par f.



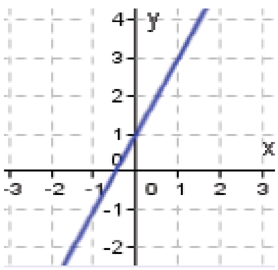
Remarque : On a (d) est la courbe représentative d'une fonction affine $\Rightarrow$ (d) est une droite. La réciproque est fausse car les droites verticales d'équation ne définissent pas des fonctions.

Exemple 1 :

1) $f(x) = 2x + 1$

$a = 2$ et $b = 1$

f est une fonction affine

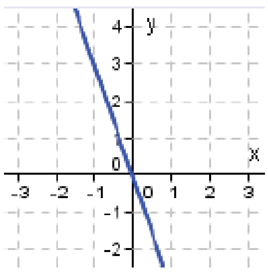


La courbe de f est une droite

2) $g(x) = -3x$

$a = -3$ et $b = 0$

g est une fonction linéaire

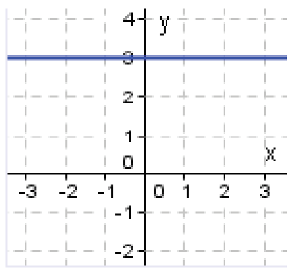


La droite passe par l'origine

3) $h(x) = 3$

$a = 0$ et $b = 3$

h est une fonction constante



La droite est horizontale

Contre-Exemple : $f(x) = x^2 + 1$ n'est pas une fonction affine. Sa courbe n'est pas une droite.

Exemple 2 : Les fonctions suivantes sont-elles des fonctions affines ?

1) $f(x) = \frac{x+3}{2}$: On a $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. Oui, $a = 0.5$ et $b = 1.5$

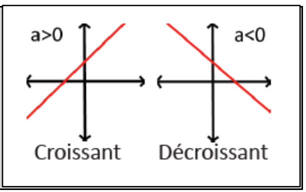
2) $g(x) = x^2 - (x+2)^2$: On a $g(x) = (x + 2 - x)(x + 2 + x) = 2(2x + 2) = 4x + 4$. Oui, $a = b = 4$

3) $h(x) = \frac{1}{x} + 5$: Non car la variable « x » est au dénominateur.

2 – Sens de variation et signe d'une fonction affine

Propriété 1 : On considère une fonction affine $f(x) = ax + b$

- Si $a > 0$ alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < 0$ alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.



Exemple 2 : $f(x) = 2x + 1$ est croissante et $g(x) = -3x$ est décroissante.

Propriété 2 : On considère une fonction affine $f(x) = ax + b$

- f s'annule en $-\frac{b}{a}$.
- Si $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

- Si $a < 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Démonstration : Soit $f(x) = ax + b$ une fonction affine

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$ donc f s'annule en $-\frac{b}{a}$.
- Si $a > 0$, alors comme f est croissante, elle est d'abord négative puis positive.
- Si $a > 0$, alors comme f est décroissante, elle est d'abord positive puis négative.

Exemple 3 : Réaliser le tableau de signe des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 4x + 2$

x	$-\infty$		-0.5		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

$-\frac{b}{a} = -\frac{2}{4} = -0.5$ et $a = 4 > 0$

f est croissante donc d'abord « $-$ » puis « $+$ »

2) $g(x) = -\frac{1}{3}x + 4$

x	$-\infty$		12		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

$-\frac{b}{a} = \frac{-4}{-\frac{1}{3}} = 4 \times \frac{3}{1} = 12$ et $a = -\frac{1}{3} < 0$

g est décroissante donc d'abord « $+$ » puis « $-$ »

3 – Linéarité

Propriété 3 : On considère une fonction affine $f(x) = ax + b$. Alors pour tout nombre réel u et v, on a :

$$\frac{f(v)-f(u)}{v-u} = a$$

Exemple 4 : On a $f(2) = 5$, $f(5) = 9$ et $f(10) = 15$. Cette fonction peut-elle être affine ?

$\frac{f(5)-f(2)}{5-2} = \frac{9-5}{5-2} = \frac{4}{3} \approx 1.33$ et $\frac{f(10)-f(5)}{10-5} = \frac{15-9}{10-5} = \frac{6}{5} = 1.2$.

Donc la propriété de linéarité n'est pas vérifiée et la fonction f ne peut donc pas être affine.

Exemple 5 : Déterminer la fonction affine f qui vérifie $f(1) = -2$ et $f(5) = 6$

Comme f est une fonction affine elle s'écrit sous la forme : $f(x) = ax + b$

On commence par calculer le coefficient directeur $a = \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{6-(-2)}{5-1} = \frac{8}{4} = 2$.

Donc $f(x) = 2x + b$. Pour trouver b, on résout une équation en utilisant une des deux valeurs proposés :

$f(1) = -2 \Leftrightarrow 2 \times 1 + b = -2 \Leftrightarrow 2 + b = -2 \Leftrightarrow b = -2 - 2 \Leftrightarrow b = -4$

Ainsi on a $f(x) = 2x - 4$.