Fiche F3.2 : La fonction carré

1 – Définition et Courbe représentative

Définition 1 : La fonction carré est la fonction qui à chaque nombre réel x associe son carré x^2.

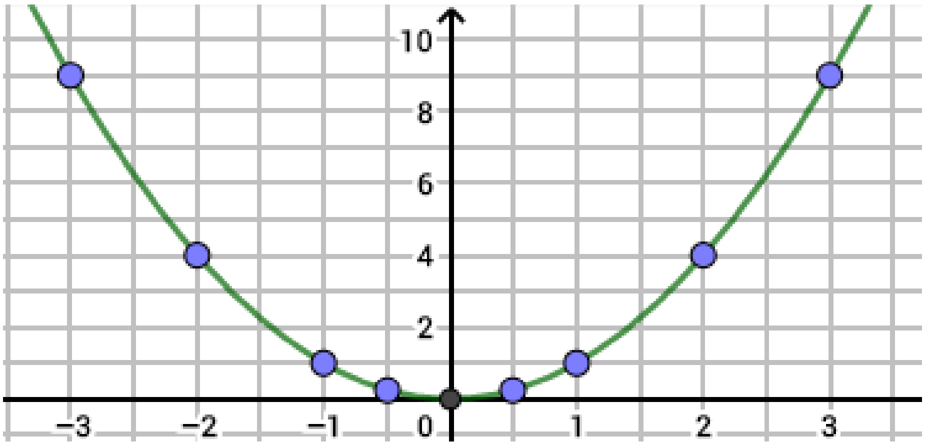
Exemple 1 :

- L'image de 5 est $5^2 = 25$; L'image de -2 est $(-2)^2 = 4$; L'image de $\frac{1}{2}$ est $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4}$
- Les antécédents de 144 sont 12 et -12 ; Les antécédents de 7 sont $-\sqrt{7}$ et $\sqrt{7}$; -1 n'a pas d'antécédents.

Ensemble de définition : $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

Courbe représentative :

x	-3	-2	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0.25	0	0.25	1	4	9



2 – Propriétés de la fonction carré

Propriété 1 : La fonction carré est **paire** : Pour tout réel x, on a $f(-x) = f(x)$.

Propriété 2 : La courbe représentative de la fonction carré est une **parabole** centrée en l'origine du repère.

Elle est **symétrique** par rapport à l'axe des ordonnées.

Propriété 3 :

- La fonction carré est **décroissante** sur $]-\infty; 0[$ puis **croissante** sur $[0; +\infty[$.
- La fonction carré admet un **minimum** en 0 qui vaut 0 et pas de maximum.
- La fonction carré est toujours **positive** : Pour tout réel x, on a $x^2 \geq 0$

- Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	

- Tableau de signe

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$	

Démonstration (Sens de variation) :

- Soit f la fonction carré et soient a et b deux nombres réels tel que $a < b$.

  Pour comparer $f(a)$ et $f(b)$ nous allons étudier le signe de $f(b) - f(a)$

- A l'aide d'une identité remarquable, factorisons $f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = \underbrace{(b-a)}_{"+"}(b+a)$

  De plus comme $a < b$, on a $b - a > 0$

- 1^er cas : Sur l'intervalle $[0; +\infty[$, a et b sont donc positifs.

  Dans ce cas, $b + a$ est positif et on a donc $f(b) - f(a) = \underbrace{(b-a)}_{"+"}\underbrace{(b+a)}_{"+"} > 0$ c'est à dire $f(b) > f(a)$

  On a montré que : Si $0 \leq a < b$ alors $f(a) < f(b)$

  Cela signifie que la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$

- 2^e cas : Sur l'intervalle $]-\infty; 0[$, a et b sont donc négatifs.

  Dans ce cas, $b + a$ est négatif et on a donc $f(b) - f(a) = \underbrace{(b-a)}_{"+"}\underbrace{(b+a)}_{"-"} < 0$ c'est à dire $f(b) < f(a)$

  On a montré que : Si $a < b \leq 0$ alors $f(a) > f(b)$

  Cela signifie que la fonction carré est décroissante sur $]-\infty; 0[$. □

3 – Equation du type $x^2 = a$

Propriété 4 : L'équation $x^2 = a$ admet :

- Si $a > 0$: 2 solutions distinctes qui sont $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$
- Si $a = 0$: 1 solution unique qui est $x = 0$
- Si $a < 0$: Aucune solution

Exemple 2 : Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2 = 1600$
$S = \{-40; 40\}$

b. $x^2 = 8$
$S = \{-\sqrt{8}; \sqrt{8}\}$

c. $x^2 = 0$
$S = \{0\}$

d. $x^2 = -0.25$
$S = \emptyset$