Fiche F3.3 : La fonction cube

1 – Définition et Courbe représentative

Définition 1 : La fonction cube est la fonction qui à chaque nombre réel x associe son cube x^3.

Exemple 1 :

• L'image de 5 est $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$; L'image de -2 est $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$;

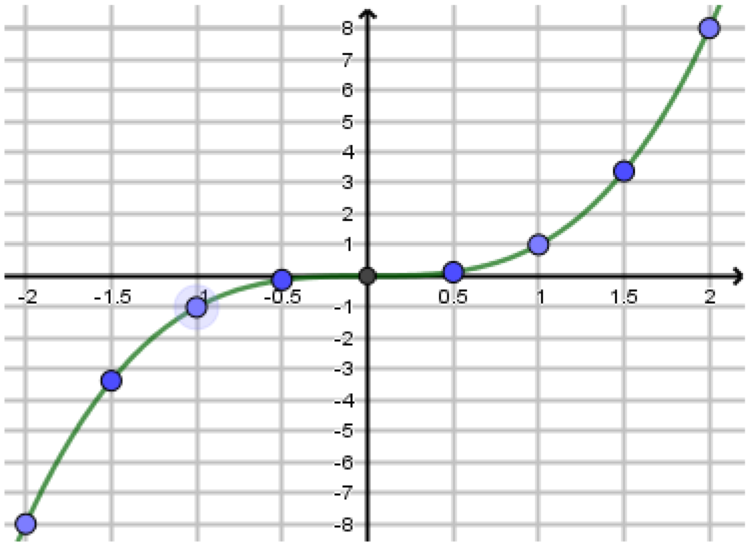
• Le nombre 27 admet un unique antécédent qui est 3 : $27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$.

• Le nombre 6 admet un unique est $\sqrt[3]{6} \approx 1.82$.

Ensemble de définition : $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

Courbe représentative :

x	-2	$-1{,}5$	1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
$f(x)$	-8	-3.375	-1	-0.125	0	0.125	1	3.375	8



2 – Propriétés de la fonction cube

Propriété 1 : La fonction cube est **impaire** : Pour tout réel x, on a $f(-x) = -f(x)$.

Propriété 2 : La courbe représentative de la fonction cube est **symétrique** par rapport à l'origine du repère.

Propriété 3 :

• La fonction cube est **croissante** sur $\mathbb{R}$ et elle n'admet pas d'extremums.

• Le cube x^3 d'un nombre x a le même signe que x.

• Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^3	$\nearrow$	0	$\nearrow$

• Tableau de signe

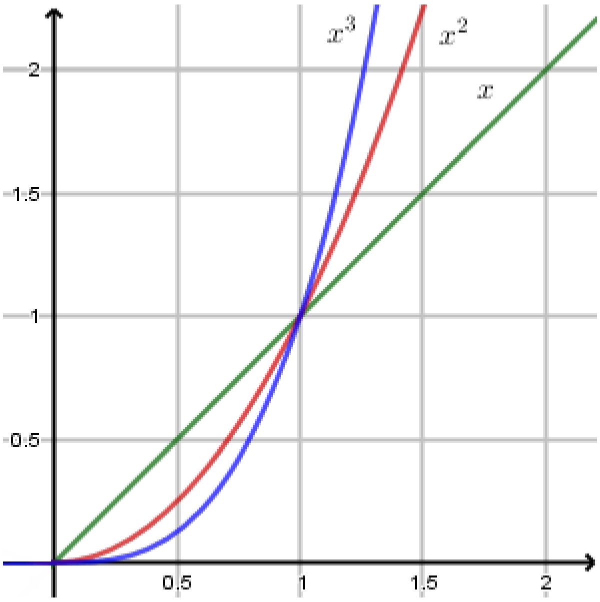
x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^3		$-$	0	$+$	

$\boxed{3}$ – Position relative

Propriété 1 :

● Pour tout réel x appartenant à $[0; 1]$, on a $x^3 \leq x^2 \leq x$.

● Pour tout réel x appartenant à $[1; +\infty[$, on a $x \leq x^2 \leq x^3$.



Démonstration :

• Si $x \in [0; 1]$ alors on a l'inégalité $0 \leq x \leq 1$.

. Si $x = 0$ alors $x^3 = x^2 = x = 0$ et l'inégalité est vérifiée.

. Si $x > 0$ alors en multipliant l'inégalité $x \leq 1$ par x on obtient $x^2 \leq x$.

. En remultipliant l'inégalité précédente par x on obtient $x^3 \leq x^2$.

. En rassemblant les deux inégalités précédentes on obtient $x^3 \leq x^2 \leq x$.

• Si $x \in [1; +\infty[$, alors on a l'inégalité $x \geq 1$.

. Comme $x > 0$, en multipliant l'inégalité $x \geq 1$ par x on obtient $x^2 \geq x$.

. En remultipliant l'inégalité précédente par x on obtient $x^3 \geq x^2$.

. En rassemblant les deux inégalités précédentes on obtient $x^3 \geq x^2 \geq x$. □