# Fiche F3.4 : La fonction inverse

## 1 – Définition & Courbe représentative

Définition 1 : La fonction inverse est la fonction qui à chaque nombre réel $x$ non nul associe son inverse $\frac{1}{x}$.

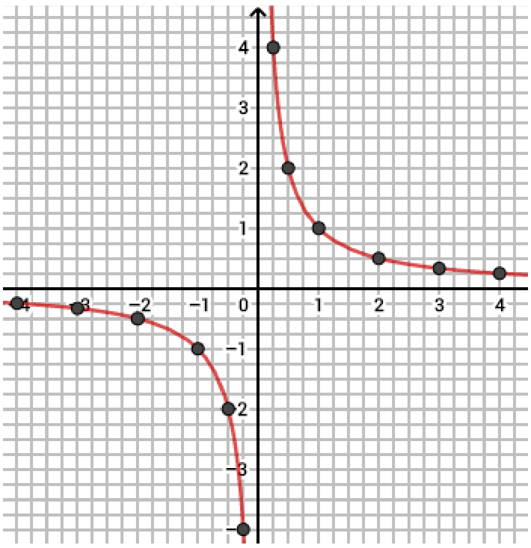
Exemple 1 :

- L'image de 2 est $\frac{1}{2}$ ; L'image de $-3$ est $\frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$ ; L'image de $\frac{1}{5}$ est $\frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$ ; L'image de 0.01 est $\frac{1}{0.01} = 100$
- L'antécédent de $\frac{1}{2}$ est 2 ; $4 = \frac{1}{\frac{1}{4}}$ donc l'antécédent de 4 est $\frac{1}{4}$ ; $0.1 = \frac{1}{10}$ donc l'antédédent de 0.1 est 10
- 0 n'a pas d'image par la fonction inverse car on ne peut pas diviser par « 0 ». 0 est une **valeur interdite**.

Ensemble de définition : $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\} = ]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

Courbe représentative :

| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $-0,5$ | $-0.25$ | $0$ | $0.25$ | $0,5$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-0.25$ | $-0.33$ | $-0.5$ | $-1$ | $-2$ | $-4$ | $\|\|$ | $4$ | $2$ | $1$ | $0.5$ | $0.33$ | $0.25$ |




## 2 – Propriétés de la fonction inverse

Propriété 1 : La fonction carré est **impaire** : Pour tout réel $x$ non nul, on a $f(-x) = -f(x)$.

Propriété 2 : La courbe représentative de la fonction inverse est une **hyperbole.**

Elle est **symétrique** par rapport à l'origine du repère.

Propriété 3 :

- La fonction inverse est **décroissante** sur $]-\infty; 0[$ puis sur $]0; +\infty[$.
- Un nombre non nul et son inverse ont toujours le même signe.

La fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$

- Tableau de variation

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{x}$ | $\searrow$ | $\|\|$ | $\searrow$ |

- Tableau de signe

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{x}$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ |

Démonstration (Sens de variation) :

- Soit $f$ la fonction inverse et soient $a$ et $b$ deux nombres réels tel que $a < b$.

  Pour comparer $f(a)$ et $f(b)$ nous allons étudier le signe de $f(b) - f(a)$

- Calculons $f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a \times 1}{a \times b} - \frac{b \times 1}{a \times b} = \frac{\overbrace{a-b}^{"-"}}{ab}$

  De plus comme $a < b$, on a $a - b < 0$

- 1er cas : Sur l'intervalle $]0; +\infty[$, $a$ et $b$ sont donc positifs.

  Dans ce cas, $ab$ est positif et on a donc $f(b) - f(a) = \frac{\overbrace{a-b}^{"-"}}{\underbrace{ab}_{"+"}} < 0$ c'est à dire $f(b) < f(a)$

  On a montré que : Si $0 \leq a < b$ alors $f(a) > f(b)$

  Cela signifie que la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$

- 2e cas : Sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ , $a$ et $b$ sont donc négatifs.

  Dans ce cas, $ab$ est positif et on a donc $f(b) - f(a) = \frac{\overbrace{a-b}^{"-"}}{\underbrace{ab}_{"+"}} < 0$ c'est à dire $f(b) < f(a)$

  On a montré que : Si $0 \leq a < b$ alors $f(a) > f(b)$

  Cela signifie que la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$ □