Fiche F3.5 : La fonction racine carré

1 – Définition et Courbe représentative

Définition 1 : La fonction racine carré associe à chaque nombre réel positif $x \geq 0$ sa racine carré $\sqrt{x}$.

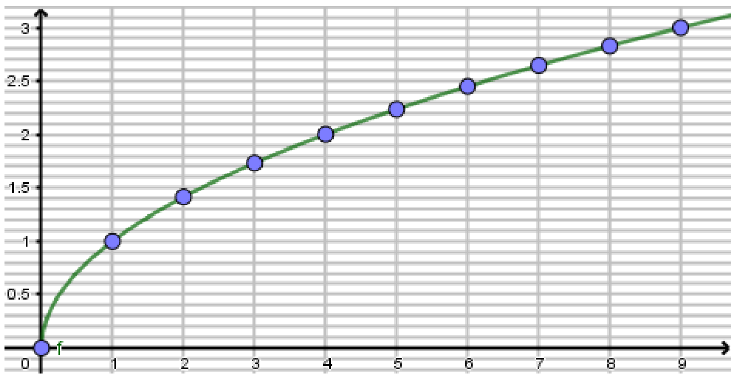
Exemple 1 :

- L'image de 4 par la fonction racine carré est $\sqrt{4} = 2$
- Le nombre 4 possède un unique antécédent par la fonction racine carré qui est 16 car $4 = \sqrt{16}$
- -1 n'a pas d'image par la fonction racine carré car la racine carré d'un nombre négatif n'existe pas.

Ensemble de définition : $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$

Courbe représentative :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	0	1	1.41	1.73	2	2.23	2.45	2.65	2.83	3



2 – Propriétés de la fonction racine carré

Propriété 1 :

- La fonction racine carré **croissante** sur $[0; +\infty[$.
- La fonction carré est toujours **positive** : Pour tout réel $x \geq 0$, on a $\sqrt{x} \geq 0$

• Tableau de variation

x	0		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$\nearrow$	

• Tableau de signe

x	0		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	+	

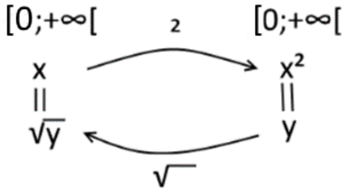
Démonstration (Sens de variation) :

- Soit f la fonction racine carré et soient a et b deux nombres réels positifs tel que $a < b$.

  Pour comparer $f(a)$ et $f(b)$ nous allons étudier le signe de $f(b) - f(a)$
- Comme a et b sont positifs, on peut écrire $a = (\sqrt{a})^2$ et $b = (\sqrt{b})^2$
- A l'aide d'une identité remarquable, factorisons $b - a = \left(\sqrt{b}\right)^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2 = (\sqrt{b} + \sqrt{a})(\sqrt{b} - \sqrt{a})$
- On a donc $f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a} = \dfrac{\overbrace{b-a}^{"+"}}{\underbrace{\sqrt{b}+\sqrt{a}}_{+}} > 0$ | Comme $a < b$, on a $b - a > 0$ et Comme $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont positifs on a $\sqrt{b} + \sqrt{a} > 0$
- On a montré que : Si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$ donc la fonction racine carré est croissante sur $[0; +\infty[$ □

3 – Lien avec la fonction carré

• Sur $[0;+\infty[$ les opérations 'carré' et 'racine carré' sont **réciproques** l'une de l'autre : $\sqrt{x^2} = x = \sqrt{x}^2$



• Les courbes des fonctions 'carré' et 'racine carré' sont **symétriques** par rapport à l'axe $y = x$