

Fiche N2.1 : Arithmétique

1 – Multiples et diviseurs

Définition 1 : Soient a et b deux entiers. On dit que b est un **multiple** de a s'il existe un entier k tel que $b = k \times a$. On dit alors que a est un **diviseur** de b ou que a divise b .

Exemple 1 :

- 12 est un multiple de 3 car $12 = 4 \times 3$ (On a $k = 4$). 3 est donc un diviseur de 12.
- 5 divise 100 car $100 = 20 \times 5$. (On a $k = 20$). 100 est donc un multiple de 5.

Propriété 1 : La somme de deux multiples d'un entier a est un multiple de a

Exemple 2 : 15 et 35 sont des multiples de 5 donc la somme $15 + 35 = 50$ est aussi un multiple de 5. En effet, on a $15 = 3 \times 5$ et $35 = 7 \times 5$ ce qui donne $50 = (3 + 7) \times 5 = 10 \times 5$.

Démonstration : On considère un entier a .

- Soient b et c deux multiples de a : On peut alors écrire $b = k \times a$ et $c = k' \times a$ avec k et k' deux entiers.
- La somme de b et c peut alors s'écrire $b + c = k \times a + k' \times a$.
- On factorise par a ce qui donne : $b + c = (k + k') \times a$.
- On a donc $b + c = K \times a$ avec $K = k + k'$ ce qui prouve que $b + c$ est un multiple de a . □

Critère de multiplicité :

- Les multiples de 2 se terminent par les chiffres 0, 2, 4, 6 ou 8.
- La somme des chiffres d'un multiple de 3 est un multiple de 3.
- Les multiples de 4 sont deux fois divisibles par 2.
- Les multiples de 5 se terminent par les chiffres 0 ou 5.
- Les multiples de 6 sont divisibles par 2 et par 3
- La somme des chiffres d'un multiple de 9 est un multiple de 9.
- Les multiples de 10 se terminent toujours par 0.

Ex : 28 est un multiple de 2.

Ex : 354 est un multiple de 3.

Ex : 284 est un multiple de 4.

Ex : 155 est un multiple de 5.

Ex : 312 est un multiple de 6.

Ex : 963 est un multiple de 9.

Ex : 510 est un multiple de 10.

2 – Nombres pairs et impairs

Définition 2 : Soit n un entier. Il y a deux cas possibles :

- n est **pair** si c 'est un multiple de 2. Il s'écrit alors sous la forme $n = 2 \times k$ avec k un entier.
- n est **impair** si ce n'est pas un multiple de 2. Il s'écrit alors sous la forme $n = 2 \times k + 1$ où k est un entier.

Exemple 3 :

- 122 est un nombre pair. Il peut s'écrire sous la forme $122 = 2 \times 61$.
- 91 est un nombre impair. Il peut s'écrire sous la forme $91 = 2 \times 45 + 1$.



Propriété 2 : Le carré d'un nombre impair est un nombre impair.

Exemple 4 : 7 est un nombre impair donc $7^2 = 49$ est aussi un nombre impair.

Démonstration : On considère un entier impair n .

- On peut alors écrire $n = 2k + 1$ avec k un nombre entier.
- A l'aide de l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, calculons le carré de n :

$$n^2 = \left(\underbrace{2k}_a + \underbrace{1}_b \right)^2 = \underbrace{(2k)^2}_{a^2} + \underbrace{2 \times 2k \times 1}_{2ab} + \underbrace{1^2}_{b^2} = \overbrace{4k^2 + 4k}^{\text{multiple de 2}} + 1$$

- Mais, $4k^2 + 4k$ est un multiple de 2 et on peut écrire : $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \underbrace{(2k^2 + 2k)}_K + 1$.
- Donc n^2 peut s'écrire sous la forme $n^2 = 2K + 1$ avec $K = 2k^2 + 2k$ ce qui prouve que n^2 est impair. \square

3 – Nombres premiers

Définition 3 : Un entier p est **premier** s'il admet exactement deux diviseurs *distincts* dans \mathbb{N} : 1 et lui-même.

Exemple 5 :

- 0 n'est pas premier car tout nombre a divise 0 : $0 = 0 \times a$; 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur.
- $2 = 2 \times 1$ est premier car il a 2 diviseurs : 1 et 2. C'est le seul nombre premier pair.
- $4 = 2 \times 2$ n'est pas premier car il possède 3 diviseurs : 1, 2 et 4.

Crible d'Eratostène : Voici un algorithme qui permet de lister les nombres premiers jusqu'à 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- On barre 1 qui n'est pas premier.
- On entoure 2 qui est premier et on barre tous les multiples de 2.
- Même chose avec 3 qui est premier.
- Le chiffre 4 est déjà barré. Même chose avec 5 qui est premier.
- Le chiffre 6 est déjà barré. Même chose avec 7 qui est premier.
- Il n'y a plus de nombres premiers inférieur ou égaux à 10, et on a barré tous les multiples des nombres inférieurs ou égaux à 10.
- Il reste à barrer seulement les nombres $n = p \times q$ avec $p, q \geq 10$.
- Mais dans ce cas $n \geq 10 \times 10 = 100$.
- On a donc barré tous les nombres premiers jusqu'à 100.

Propriété 3 : Tout nombre entier $p \geq 2$ est soit premier, soit **décomposable en produit de facteurs premiers**.

La décomposition obtenue est alors unique.

Exemple 6 :

- 79 est premier donc il n'est pas décomposable en produit de facteurs premiers.
- $360 = 36 \times 10$
 $= (6 \times 6) \times (2 \times 5)$
 $= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times 2 \times 5$
 $= 2^3 \times 3^2 \times 5$.

