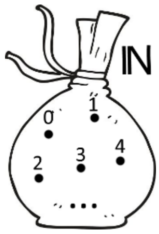
Fiche ___ : Les différents types de nombres

1 – Nombres entiers

Définition 1 :

- Les **entiers naturels** sont les entiers ____________________ . L'ensemble des entiers naturels est noté __ .
- Les **entiers relatifs** sont les entiers ______________________ . L'ensemble des entiers relatifs est noté __ .

Remarques :

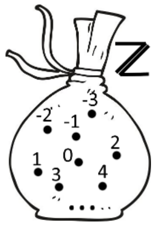


- On utilise les symboles ∈ (qui signifie *appartient à*) et ∉ (qui signifie *n'appartient pas à*) pour dire si un élément est dans un ensemble. On a par exemple :

$$25 \_\ \mathbb{N} \text{ et } 25 \_\ \mathbb{Z} \text{ ; } -4 \_\ \mathbb{Z} \text{ mais } -4 \_\ \mathbb{N}.$$

- Pour énumérer les éléments d'un ensemble on utilise les accolades :

_______________________ et _________________________



- Tous les éléments de ℕ sont donc aussi dans ℤ.

Dans ce cas on dit que l'ensemble ℕ ___________ dans l'ensemble ℤ et on note ______.

2 – Nombres décimaux

Les nombres décimaux sont les nombres à virgule, avec un nombre fini de décimales :

Définition 2 :

Exemple 1 :

- $-2{,}531$ est un nombre décimal : ___________________________________.
- $\frac{4}{25}$ est un nombre décimal : ____.
- Les nombres entiers sont des nombres décimaux, on a __________. Par exemple : $2 =$_________________.

Propriété 1 :

Démonstration : Par l'absurde : Supposons que $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$.

- On peut alors écrire ce nombre sous la forme : ____
- Le produit en croix permet d'écrire l'égalité suivante : _______________ c'est-à-dire _________________
- Cela signifie que ____________________________ ou autrement dit que _____________________________
- Mais cela est impossible, car la décomposition en produit de nombres premiers de 10^n donne :

$10^n =$ ________________________ donc les seuls diviseurs de 10^n sont ________________

- L'hypothèse de départ est donc fausse donc ______________ □

3 – Nombres rationnels

Les nombres rationnels sont les nombres qui peuvent s'écrire sous forme d'une fraction de deux entiers :

Définition 3 :

Exemple 2 : Les nombres suivants sont des rationnels dont il est utile de connaître la valeur décimale :

• $\frac{1}{2} =$ ______	• $\frac{1}{3} =$ ______	• $\frac{1}{4} =$ ______	• $\frac{1}{5} =$ ______	• $\frac{1}{6} =$ ______
• $\frac{1}{10} =$ ______	• $\frac{2}{3} =$ ______	• $\frac{3}{4} =$ ______	• $\frac{3}{2} =$ ______	• $\frac{4}{3} =$ ______

Remarques :

• Les nombres décimaux sont des nombres rationnels. On a ____________.

• Les nombres rationnels sont **périodiques** : A partir d'une certaine décimale, la suite des chiffres se répète indéfiniment. Par exemple, $\frac{3}{14} =$ ____

• On peut toujours écrire un nombre rationnel sous forme de **fraction irréductible** $x = \frac{p}{q}$, c'est-à-dire tel que p et q soit **premiers entre eux** (sans diviseurs en commun). Par exemple : $\frac{49}{84} =$ ___________________

4 – Nombres réels

Tous les nombres ne sont pas rationnels. Certains nombres ne peuvent pas s'écrire sous forme de fraction :

Propriété 2 :

Démonstration : Par l'absurde : Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

• On peut alors écrire ce nombre sous la forme : ____

• On peut supposer que la fraction est irréductible et donc que p et q _________________________________

• En élevant l'égalité précédente au carré, on obtient : ____

• Le produit en croix permet d'écrire que _________________ ce qui prouve que p^2 est _________________.

• On en déduit que p est aussi un nombre pair car, si p était impair, p^2 le serait aussi* ce qui est impossible. (*En effet, le carré d'un nombre impair est impair). On peut donc écrire ______________________________

• L'égalité $p^2 = 2q^2$ peut s'écrire ___________ puis __________ puis ___________ (en divisant par 2).

• Ainsi, on en déduit que q^2 est ______ et donc que q est ______ (via le même raisonnement que pour p)

• On a donc montré que p et q sont pairs ce qui impossible car la fraction était supposée irreductible.

• L'hypothèse de départ est donc fausse : __________ □

Remarques :

• Beaucoup de nombres ne sont pas rationnels : $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$, etc. On dit qu'ils sont ____________________

• Les nombres irrationnels ne sont pas périodiques : $\pi =$ ________________ ; $\sqrt{2} =$ _________________

• Tout nombre réel peut être **encadré à 10^{-n} près** par 2 nombres décimaux.

Ex : Encadrement de π à 10^{-4} près : $3.1415 \leq \pi < 3.1416$.

Définition 4 :

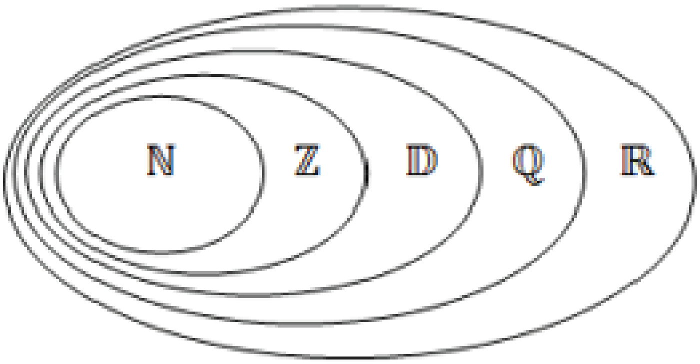
A.N.N.E.X.E

Dans les 2 figures ci-dessous, placer les nombres suivants :

$$0\ ;\ -1\ ;\ 0.3\ ;\ \frac{3}{2}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \pi\ ;\ \sqrt{2}\ ;\ \frac{4}{7}\ ;\ -\frac{2}{5}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ 10^{10}\ ;\ 10^{-1}\ ;\ -10^{2};\ \frac{4}{2}\ ;\ \sqrt{9}\ ;\ -\frac{1}{6}$$

• **Figure 1 : Relation entre les ensembles**

. Chaque nombre réel peut être classé dans un des ensembles de nombres.



. On a la relation d'inclusion : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

• **Figure 2 : La droite numérique**

. L'ensemble des nombres réels peut-être représenté par une droite graduée : A chaque point de la droite correspond un unique nombre réel.

. La droite s'étend de l'infini négatif ($-\infty$) à l'infini positif ($+\infty$).