Fiche N2.2 : Les différents types de nombres

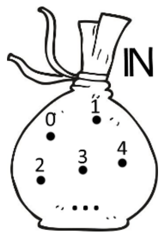
1 – Nombres entiers

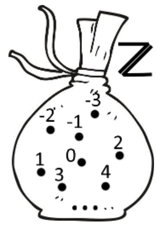
Définition 1 :

• Les **entiers naturels** sont les entiers positifs ou nul. L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.

• Les **entiers relatifs** sont les entiers positifs, négatifs ou nul. L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$.

Remarques :





- On utilise les symboles $\in$ (qui signifie *appartient à*) et $\notin$ (qui signifie *n'appartient pas à*) pour dire si un élément est dans un ensemble. On a par exemple :

$$25 \in \mathbb{N} \text{ et } 25 \in \mathbb{Z}\,;\ -4 \in \mathbb{Z} \text{ mais } -4 \notin \mathbb{N}.$$

- Pour énumérer les éléments d'un ensemble on utilise les accolades :

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\} \text{ et } \mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$$

- Tous les éléments de $\mathbb{N}$ sont donc aussi dans $\mathbb{Z}$.

  Dans ce cas on dit que l'ensemble $\mathbb{N}$ **est inclus** dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ et on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

2 – Nombres décimaux

Les nombres décimaux sont les nombres à virgule, avec un nombre fini de décimales :

Définition 2 : Un nombre x est **décimal** s'il peut s'écrire sous la forme $x = \frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Exemple 1 :

• $-2{,}531$ est un nombre décimal : $-2{,}531 = \frac{-2531}{1000} = \frac{-253}{10^3}$

• $\frac{4}{25}$ est un nombre décimal : $\frac{4}{25} = \frac{4\times4}{25\times4} = \frac{16}{100} = \frac{16}{10^2}$

• Les nombres entiers sont des nombres décimaux, on a donc $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$. Par exemple : $2 = \frac{2}{1} = \frac{2}{10^0}$

Propriété 1 : Le nombre $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

Démonstration : Par l'absurde : Supposons que $\frac{1}{3} \in \mathbb{D}$.

• On peut alors écrire ce nombre sous la forme $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

• Le produit en croix permet d'écrire l'égalité suivante : $1 \times 10^n = 3 \times a$ c'est-à-dire $10^n = 3 \times a$.

• Cela signifie que 10^n est un multiple de 3 ou autrement dit que 3 est un diviseur de 10^n

• Mais cela est impossible, car la décomposition en produit de nombres premiers de 10^n donne :

$10^n = (2 \times 5)^n = 2^n \times 5^n$ donc les seuls diviseurs de 10^n sont 2 et 5.

• L'hypothèse de départ est donc fausse donc $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$. □

3 – Nombres rationnels

Les nombres rationnels sont les nombres qui peuvent s'écrire sous forme d'une fraction de deux entiers :

Définition 3 : Un nombre x est **rationnel** s'il peut s'écrire sous la forme $x = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$ tel que $q \neq 0$.
L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{Q}$.

Exemple 2 : Les nombres suivants sont des rationnels dont il est utile de connaître la valeur décimale :

- $\frac{1}{2} = 0.5$
- $\frac{1}{3} = 0.333\ldots$
- $\frac{1}{4} = 0.25$
- $\frac{1}{5} = 0.2$
- $\frac{1}{6} = 0.166\ldots$
- $\frac{1}{10} = 0.1$
- $\frac{2}{3} = 0.666\ldots$
- $\frac{3}{4} = 0.75$
- $\frac{3}{2} = 1.5$
- $\frac{4}{3} = 1.333\ldots$

Remarques :

- Les nombres décimaux sont des nombres rationnels, on a donc $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$
- Les nombres rationnels sont **périodiques** : A partir d'une certaine décimale, la suite des chiffres se répète indéfiniment. Par exemple, $\frac{3}{14} = 0{,}21\ \underbrace{42857}_{période}\ \underbrace{42857}_{période} \ldots. = 0.21\ \underline{42857}$.
- On peut toujours écrire un nombre rationnel sous forme de **fraction irréductible** $x = \frac{p}{q}$, c'est-à-dire tel que p et q soit **premiers entre eux** (sans diviseurs en commun). Par exemple : $\frac{49}{84} = \frac{7^2}{2^2 \times 3 \times 7} = \frac{7}{2^2 \times 3} = \frac{7}{12}$.

4 – Nombres réels

Tous les nombres ne sont pas rationnels. Certains nombres ne peuvent pas s'écrire sous forme de fraction :

Propriété 2 : Le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Démonstration : Par l'absurde : Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

- On peut alors écrire ce nombre sous la forme $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q deux nombres entiers tel que $q \neq 0$.
- On peut supposer que la fraction est irréductible et donc que p et q n'ont pas de diviseurs en commun.
- En élevant l'égalité précédente au carré, on obtient : $(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$ c'est-à-dire $2 = \frac{p^2}{q^2}$
- Le produit en croix permet d'écrire que $p^2 = 2 \times q^2$ ce qui prouve que p^2 est un nombre pair.
- On en déduit que p est aussi un nombre pair, car si p était impair, p^2 le serait aussi* ce qui est impossible. (*En effet, Le carré d'un nombre impair est impair). On peut donc écrire $p = 2k$ avec k un nombre entier.
- L'égalité $p^2 = 2q^2$ peut s'écrire $(2k)^2 = 2q^2$ puis $4k^2 = 2q^2$ puis $2k^2 = q^2$ (en divisant par 2).
- Ainsi, on en déduit que q^2 est pair et donc que q est pair (via le même raisonnement que pour p)
- On a donc montré que p et q sont pairs ce qui impossible car la fraction était supposée irreductible.
- L'hypothèse de départ est donc fausse : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ □

Remarques :

- Beaucoup de nombres ne sont pas rationnels : $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$, etc. On dit qu'ils sont **irrationnels.**
- Les nombres irrationnels ne sont pas périodiques : $\pi = 3.14159265359\ldots$; $\sqrt{2} = 1.41421356237\ldots$
- Tout nombre réel peut être **encadré à $\mathbf{10^{-n}}$ près** par 2 nombres décimaux.

  Ex : Encadrement de π à 10^{-4} près : $3.1415 \leq \pi < 3.1416$.

Définition 4 : L'ensemble des nombres **réels** noté $\mathbb{R}$ contient tous les nombres rationnels et irrationnels.

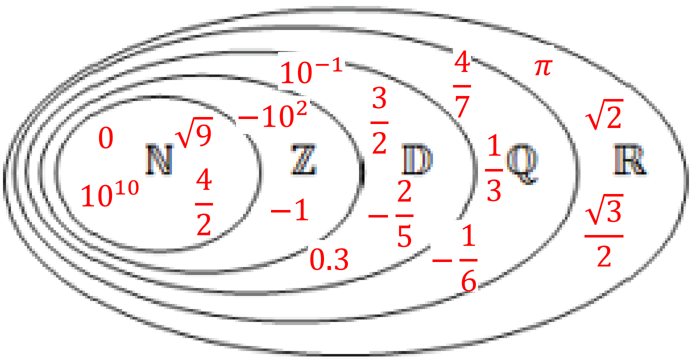
A.N.N.E.X.E

Dans les 2 figures ci-dessous, on a placé les nombres suivants :

$$0\ ;-1\ ;0.3\ ;\frac{3}{2};\frac{1}{3}\ ;\pi\ ;\sqrt{2}\ ;\frac{4}{7};-\frac{2}{5};\frac{\sqrt{3}}{2};10^{10}\ ;10^{-1}\ ;-10^{2};\frac{4}{2};\sqrt{9}\ ;-\frac{1}{6}$$

- **Figure 1 : Relation entre les ensembles**

. Chaque nombre réel peut être classé dans un des ensembles de nombres.



. On a la relation d’inclusion : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

- **Figure 2 : La droite numérique**

. L’ensemble des nombres réels peut-être représenté par une droite graduée : A chaque point de la droite correspond un unique nombre réel.

. La droite s’étend de l’infini négatif $(-\infty)$ à l’infini positif $(+\infty)$.