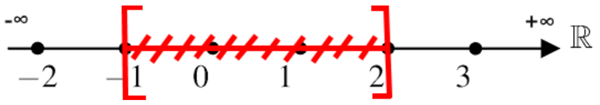
Fiche N2.3 : Intervalles

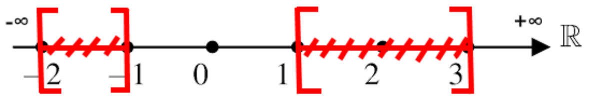
1 – La notion d'intervalle

Définition 1 : Un **intervalle** est une partie de la droite numérique en « un seul morceau ».

Exemple 1 :



Ceci est un intervalle : C'est l'ensemble des nombres compris entre -1 et 2. Il est noté $[-1; 2]$.

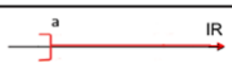
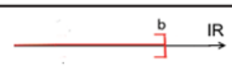


Ceci n'est pas un intervalle. La partie comporte « plusieurs morceaux ».

- Les intervalles **bornées**

Intervalles	Ensemble des réels x tel que…	Représentation graphique
[a;b]	$a \le x \le b$	
]a;b[	$a < x < b$	
[a;b[	$a \le x < b$	
]a;b]	$a < x \le b$	

- Les intervalles **non-bornées**

Intervalles	Ensemble des réels x tel que…	Représentation graphique
$[a;+\infty[$	$a \le x$	
$]a;+\infty[$	$a < x$	
$]-\infty;b]$	$x \le b$	
$]-\infty;$b[	$x < b$	

Remarques :

- $[a; b]$ est dit **fermé**

  $]a; b[$ est dit **ouvert.**

  $[a; b[$ et $]a; b]$ sont dits **semi-ouverts.**

- Les bornes en l'infini sont toujours ouvertes.
- On a les égalités suivantes :

  $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

  $[a; a] = \{a\}$

  $]a; a[= \emptyset$

Exemple 1 : Quelques exemples d'intervalles

Intervalles	Ensembles des réels x tel que	Représentation graphique
$[-3; 2]$	$-3 \le x \le 2$	
$[-1; +\infty[$	$x \ge -1$	
$]-2; 5]$	$-2 < x \le 5$	
$]-\infty; 2[$	$x < 2$	

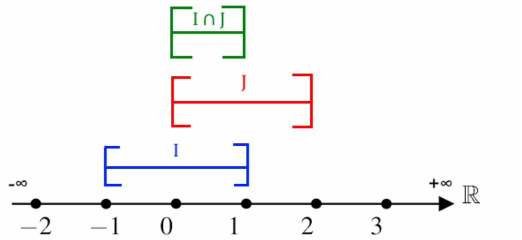
2 – Intersection, Réunion d’intervalles

Définition 2 : Soit I et J deux intervalles.

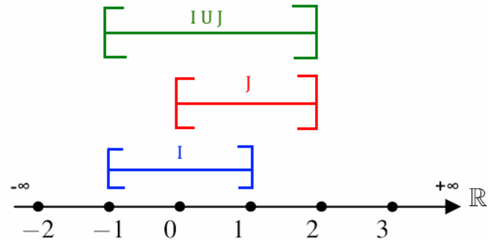
- L’**intersection** de I et J, noté $I \cap J$, est l’ensemble des nombres réels qui sont à la fois dans I et dans J.
- La **réunion** de I et J, noté $I \cup J$, est l’ensemble des nombres réels qui sont dans I ou dans J.

Exemple 3 : Soit $I = [-1; 1]$ et $J = [0; 2]$

Intersection : $I \cap J = [0; 1]$



Réunion : $I \cup J = [-1; 2]$



Remarque : La réunion de deux intervalles n’est pas toujours un intervalle.

3 – Distance entre deux réels & Intervalle centré en a

Définition 3 : La **valeur absolue** d’un réel x, notée $|x|$, est le nombre positif définie par $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$

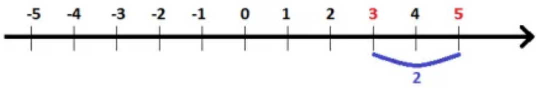
Remarque : La valeur absolue d’un nombre correspond à sa partie numérique sans le signe.

Exemple 4 : $|5| = 5$; $|-1.25| = -(-1{,}25) = 1{,}25$.

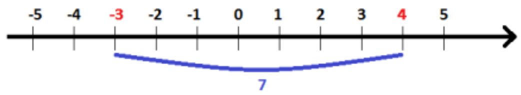
Propriété 1 : La **distance** entre deux réels a et b placés sur la droite numérique notée est égal à $|b - a|$.

Exemple 5 :

- Distance entre 3 et 5 : $|5 - 3| = 2$



- Distance entre 4 et -3 : $|-3 - 4| = |-7| = 7$



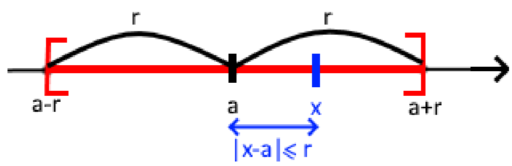
Remarque :

- Si $a \leq b$ alors $b - a \geq 0$ et donc on a $|b - a| = b - a$.
- Si $a > b$ alors $b - a < 0$ et donc $|b - a| = -(b - a) = -b + a = a - b$.

Propriété 2 : L’intervalle $[a - r; a + r]$ est l’ensemble des réels x tels que $|x - a| \leq r$.

Remarques :

- L’intervalle $[a - r; a + r]$ contient tous les réels qui sont situés à une distance du réel a inférieur à r.
- On dit que l’intervalle $[a - r; a + r]$ est **centré** en a et de **rayon** r.



Exemple 6 : Déterminer l’ensemble des réels x tel que $|x - 2| \leq 3$.

Il s’agit de l’ensemble des nombres réels situés à une distance du réel $a = 2$ inférieure à $r = 3$.

C’est donc l’intervalle $I = [2 - 3; 2 + 3] = [-1; 5]$.