

## Fiche P2.2 : Moyenne & Ecart-type

On considère une série statistique prenant  $p$  valeurs différentes  $x_1, \dots, x_p$  avec les effectifs  $n_1, \dots, n_p$ . On note  $N$  l'effectif total et  $f_1, \dots, f_p$  les fréquences de chacune des valeurs.

<b>Valeurs</b>	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_p$	<b>Total</b>
<b>Effectifs</b>	$n_1$	$n_2$	$n_3$	...	$n_p$	$N$
<b>Fréquences</b>	$f_1$	$f_2$	$f_3$	...	$f_p$	1

### 1 – Moyenne pondérée

**Définition 1 :** La **moyenne** de la série, noté  $\bar{x}$ , est donnée par l'une des formules suivantes :

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_px_p}{N} = f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_px_p.$$

**Exemple 1 :** Voici les notes d'une classe d'une interrogation notée sur 10 :

1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 7 ; 9 ; 9 ; 9 ; 9

La moyenne de la classe est égale à :  $\bar{x} = \frac{2 \times 1 + 1 \times 2 + 4 \times 3 + 5 \times 5 + 1 \times 7 + 4 \times 9}{17} = \frac{84}{17} \approx 4.94$

**Remarque :** Lorsque les données sont rangées en classe de valeur on utilise le **centre** de chaque classe.

**Propriété 1 (Linéarité de la moyenne) :** Si une série de valeurs  $x_i$  a pour moyenne  $\bar{x}$  alors la série des valeurs  $ax_i + b$  a pour moyenne  $a\bar{x} + b$ .

**Exemple 2 :** Le professeur décide de mettre les notes précédentes sur 20 et de rajouter un point bonus de présentation à tous les élèves. Quelle sera la nouvelle moyenne de la classe ?

On multiplie par 2 et on ajoute 1 à toute les notes. La moyenne sera donc de  $2 \times 4.94 + 1 = 10,88$

### 2 – Variance & Ecart-type

**Définition 2 :** La **variance**  $V$  d'une série statistique est la moyenne des carrés des écarts entre les valeurs de la série et la moyenne  $\bar{x}$  de la série. L'**écart-type**  $\sigma$  de la série est la racine carré de la variance.

**Exemple 3 :** Voici les notes de mathématiques de deux élèves au 1<sup>er</sup> trimestre

Antoine : 3 ; 18 ; 19 ; 4

Mathilde : 10 ; 11 ; 11 ; 12

1) Comparer les notes d'Antoine et Mathilde puis calculer mentalement leur moyenne respective

*Les notes d'Antoine sont dispersés contrairement à celle de Mathilde. Dans les 2 cas on trouve  $\bar{x} = 11$ .*

2) Compléter le tableau suivant pour calculer la variance et l'écart-type des notes d'Antoine :

Notes d'Antoine					Somme des carrés des écarts	Moyenne des carrés des écarts	Racine carré du résultat.
Ecart avec la moyenne							
Carré de l'écart							

3) Justifier que la variance des notes de Mathilde est donnée par  $V = \frac{(10-\bar{x})^2 + (12-\bar{x})^2 + 2 \times (11-\bar{x})^2}{4}$ .

Calculer la variance et l'écart type des notes de Mathilde. On a  $V = 0.5$  et  $\sigma = \sqrt{0.5} \approx 0.71$

4) Comparer les écart-type d'Antoine et de Mathilde. *L'écart-type des notes d'Antoine est plus élevé.*

**Remarque :** L'écart-type permet de mesurer la **dispersion** des valeurs autour de la moyenne. Il a la même unité que les valeurs de la série et en pratique on le détermine grâce au tableur ou à la calculatrice.

