Fonctions cube - Exercices

1 (Image)

- $0^3 = 0$
- $(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$
- $\left(\frac{-2}{5}\right)^3 = \frac{(-2)^3}{5^3} = -\frac{8}{125}$
- $(10^2)^3 = 10^{2\times 3} = 10^6$;
- $(4 \times 10^3)^3 = 4^3 \times 10^{3\times 3} = 64 \times 10^9$
  $= 6.4 \times 10^{10}$
- $(-0.02)^3 = (-2 \times 10^{-2})^3$
  $= (-2)^3 \times 10^{-2\times 3}$
  $= -8 \times 10^{-6} = -0.000008$
- $\left(\sqrt{5}\right)^3 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \times \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$
- $\left(-3\sqrt{3}\right)^3 = (-3)^3 \times \left(\sqrt{3}\right)^3$
  $= -27 \times 3\sqrt{3} = -81\sqrt{3}$

2 (Antécédents)

- $27 = 3^3$. L'antécédent est 3.
- $125\,000\,000 = 500^3$. L'antécédent est 500.
- $10^9 = 10^{3\times 3} = (10^3)^3$. L'antécédent est 100.
- $-0.001 = -0.1^3$. L'antécédent est -0.1.
- $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$. L'antécédent est $\frac{1}{2}$.
- $-\frac{1}{64} = -\frac{1}{4^3} = \left(-\frac{1}{4}\right)^3$. L'antécédent est $-\frac{1}{4}$.
- $2\sqrt{2} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{2}^3$.
  L'antécédent est $\sqrt{2}$.

<u>Remarque</u> : On peut aussi utiliser la racine cubique $\sqrt[3]{\ }$ pour trouver les antécédents.

3 (Equations/Inéquations)

a. $x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2 : S = \{-2\}$
b. $x^3 \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geq 1 : S = [1 ; +\infty[$
c. $x^3 < 0 \Leftrightarrow x < 0 :\ S =]-\infty ; 0[$
d. $x^3 \geqslant -0{,}125 \Leftrightarrow x \geq -0.5\ :\ S = [-0.5 ; +\infty[$

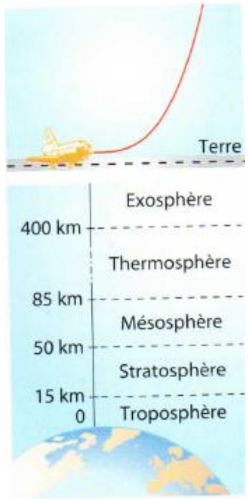
4 (Encadrement)

a. Si $0{,}5 \leq x \leq 1$ alors $0.125 \leq x^3 \leq 1$
car $0.5^3 \leq x^3 \leq 1^3$
b. Si $x \leq 0{,}3$ alors $x^3 \in]-\infty; 0.027]$
car $x^3 \leq 0.3^3 = 0.027$
c. Si $x \geq -0{,}5$ alors $x^3 \in [-0.125; +\infty[$
car $x^3 \geq -0.5^3 = -0.125$
d. Si $x \in [1{,}5; 3]$ alors $x^3 \in [3.375; 27]$
car $1.5^3 \leq x^3 \leq 3^3 \Leftrightarrow 3.375 \leq x^3 \leq 27$

5 (Comparaison)

Comparer les nombres suivants :
a. $0.01^3 > 0.007^3$: Car $0.01 > 0.007$ et que la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.
b. $-1.12^3 > -1.21^3$: Car $-1.12 > -1.21$ et que la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.
c. $(1-\sqrt{2})^3 > (1-\sqrt{3})^3$: Comme $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ on a $1-\sqrt{2} > 1-\sqrt{3}$ et la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.

6 (Navette spatiale)



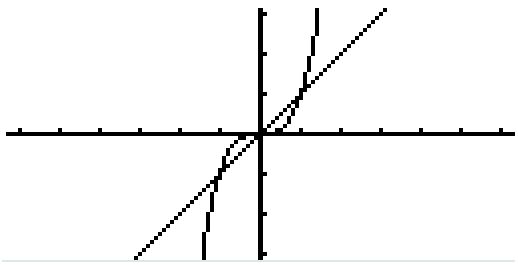
1) $F(t) \geq 15$
$\Leftrightarrow 0.00001t^3 \geq 15$
$\Leftrightarrow t^3 \geq \frac{15}{0.00001}$
$\Leftrightarrow t^3 \geq 1\,500\,000$
$\Leftrightarrow t \geq \sqrt[3]{1\,500\,000} = 114\ s$
Au bout de $1\ min\ 54\ s$
2) $F(t) \leq 50$
$\Leftrightarrow 0.00001t^3 \leq 50$
$\Leftrightarrow t^3 \leq \frac{50}{0.00001}$
$\Leftrightarrow t^3 \leq 5\,000\,000$
$\Leftrightarrow t \leq \sqrt[3]{5\,000\,000} = 171\ s$
Donc $171 - 114 = 57\ s$

7 (Position relative)

a. $0.6 > 0.6^2 > 0.6^3$ car $0.6 < 1$
b. $2..5 < 2.5^2 < 2.5^3$ car $2.5 > 1$
c. $\frac{9}{10} > \left(\frac{9}{10}\right)^2 > \left(\frac{9}{10}\right)^3$ car $\frac{9}{10} < 1$
d. $\frac{13}{12} < \left(\frac{13}{12}\right)^2 < \left(\frac{13}{12}\right)^3$ car $\frac{13}{12} > 1$

8 (Position relative 2)

1) Faux, par exemple : $0.5^3 = 0.125 < 0.5$
2) <u>Méthode graphique</u>
a. La courbe de la fonction cube est au-dessus de la courbe de la fonction x après 1 et entre -1 et 0.



b. $x^3 > x$. $S =]-1; 0[\cup]1; +\infty[$

3) Méthode algébrique

Soit h la fonction définie par $h(x) = x^3 - x$.

a. $h(x) = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$.

b. Réaliser le tableau de signe de h.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

c. $h(x) > 0$ lorsque h est $+$ donc on retrouve :
$S =]-1; 0[\cup]1; +\infty[$

9 Lorsque n est pair la fonction f_n est paire. Elle est également décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$ et positive sur $\mathbb{R}$. Lorsque n est impair la fonction f_n est impaire. Elle est également croissante sur $\mathbb{R}$ et négative sur $]-\infty; 0]$ puis positive sur $[0; +\infty[$