Fonctions affines - Exercices

Généralités

1 (Fonctions affines)

a. $f(x)=\frac{2x+6}{3}=\frac{2x}{3}+\frac{6}{3}=\frac{2}{3}x+2.$

On a $f(x)=ax+b$ avec $a=\frac{2}{3}$ et $b=2$

b. $f(x)=\frac{x+5}{2}-x=\frac{x}{2}+\frac{5}{2}-x=\frac{1}{2}x+2.5-x$
$=-0.5x+2.5.$

On a $f(x)=ax+b$ avec $a=-0.5$ et $b=2.5$

c. $f(x)=2(3-x)-(4x-5)$
$=6-2x-4x+5=-6x+11$

On a $f(x)=ax+b$ avec $a=-6$ et $b=11$

d. $f(x)=(x+1)^2-x^2$
$=x^2+2x+1-x^2=2x+1$

On a $f(x)=ax+b$ avec $a=2$ et $b=1$

e. $f(x)=(2x+3)^2-4x^2$
$=(2x)^2+2\times 2x\times 3+3^2-4x^2$
$=4x^2+12x+9-4x^2=12x+9$

On a $f(x)=ax+b$ avec $a=12$ et $b=9$

f. $f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{x+4}{2}+x=\frac{1}{2}x+\frac{x}{2}+\frac{4}{2}+x$
$=0.5x+0.5x+2+x=2x+2$

On a $f(x)=ax+b$ avec $a=12$ et $b=9$

2 (Quatre droites)

On doit trouver graphiquement le coefficient directeur a et l'ordonnée à l'origine b.

$(d_1):f(x)=-\frac{1}{2}x+1$; affine

$(d_2):f(x)=2x-2$; affine

$(d_3):f(x)=-2x$; linéaire

$(d_4):f(x)=2$; constante

3 (Trois tableaux de valeurs)

$f(x)=4x-3$: On va de 4 en 4 et $f(0)=-3.$

$g(x)=-2x$: On va de -2 en -2 et $f(0)=0.$

$h(x)=5$: Fonction constante égale à 5

4 (Etude d'une fonction affine)

■ $f(x)=\frac{1}{3}x-2.$

1) $f(x)=ax+b$ avec $a=\frac{1}{3}$ et $b=-2$

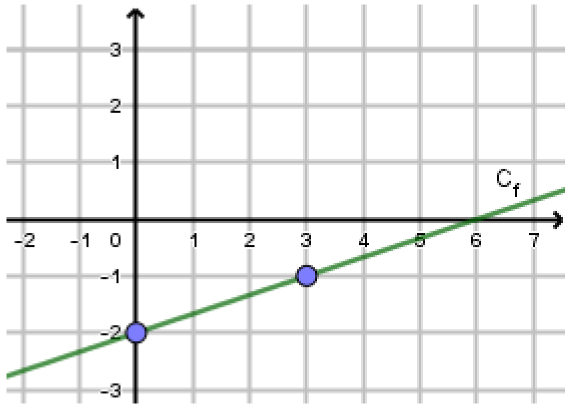
2) a. $f(3)=\frac{1}{3}\times 3-2=1-2=-1$

b. On cherche x tel que $f(x)=3$

$\frac{1}{3}x-2=3 \Leftrightarrow_{+2} \frac{1}{3}x=5 \Leftrightarrow_{\times 3} x=3\times 5=15$

L'antécédent de 3 par f est 15

3) Pour tracer la fonction on peut utiliser deux points distincts de la fonction : Par exemple $(0;-2)$ et $(3;-1)$ puis les relier à la règle.



4) a. f est croissante car $a=\frac{1}{3}>0$

b. $-\frac{b}{a}=-\frac{-2}{\frac{1}{3}}=2\times\frac{3}{1}=2\times 3=6.$

La fonction s'annule en 6.

c.

x	$-\infty$		6		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

■ $g(x)=-2x-3$

1) $g(x)=ax+b$ avec $a=-2$ et $b=-3$

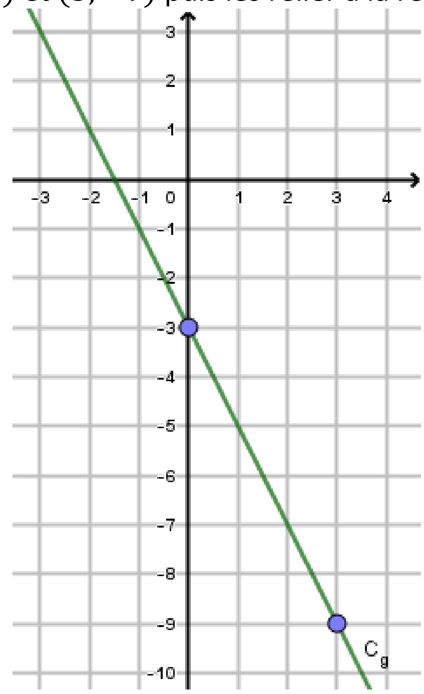
2) a. $f(3)=-2\times 3-3=-9$

b. On cherche x tel que $g(x)=3$

$-2x-3=3 \Leftrightarrow_{+3} -2x=6 \Leftrightarrow_{\div(-2)} x=-3$

L'antécédent de 3 par f est -3

3) Pour tracer la fonction on peut utiliser deux points distincts de la fonction : Par exemple $(0;-3)$ et $(3;-9)$ puis les relier à la règle.



4) a. f est décroissante car $a=-2<0$

b. $-\frac{b}{a}=-\frac{-3}{-2}=-1.5.$

La fonction s'annule en -1.5.

c.

x	$-\infty$		-1.5		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

5 (Tableau de signe)

a. $f(x) = 3x + 2$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

b. $f(x) = -3x + 7$

x	$-\infty$		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

c. $f(x) = \frac{1}{2}x - 4$

x	$-\infty$		8		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

$-\frac{4}{\frac{1}{2}} = -4 \times 2 = -8$

d. $f(x) = -x + 2 : a = -1$ et $b = 2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

e. $f(x) = \frac{3}{2} + x : a = 1$ et $b = \frac{3}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

f. $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x : a = -\frac{3}{4}$ et $b = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

$\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

6 (Tracer une droite 3)

- 1^er tableau : $-\frac{b}{a} = 4$ et a doit être positif.

Par exemple $a = 1$ et $b = -4 : f(x) = x - 4$

- 2^ème tableau : $-\frac{b}{a} = \frac{1}{3}$ et a doit être négatif.

Par exemple $a = -3$ et $b = 1 : f(x) = -3x + 1$

7 (Trouver une fonction affine)

Trouver la fonction affine f qui vérifie :

a. $f(0) = 3$ et $f(1) = 0$

On commence par trouver le coefficient a :

$a = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{0-3}{1-0} = -\frac{3}{1} = -3$

$b = f(0) = 3$

Donc $f(x) = -3x + 3$

b. $f(-4) = -1$ et $f(8) = 2$

On commence par trouver le coefficient a :

$a = \frac{f(8)-f(-4)}{8-(-4)} = \frac{2-(-1)}{8+4} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

Pour trouver b on résout une équation.

On sait que $f(x) = \frac{1}{4}x + b$

Or on sait aussi que $f(-4) = -1$

En remplaçant x par -4, on obtient :

$\frac{1}{4} \times (-4) + b = -1$ d'où $-1 + b = -1$

Donc $b = -1 + 1 = 0$

Ainsi $f(x) = \frac{1}{4}x + 0 = \frac{1}{4}x$

c. $f(1000) = 2010$ et $f(100) = 210$

On commence par trouver le coefficient a :

$a = \frac{f(1000)-f(100)}{1000-100} = \frac{2010-210}{1000-100} = \frac{1800}{900} = 2$

On a donc $f(x) = 2x + b$

Pour trouver b on résout une équation.

On sait aussi que $f(100) = 210$

En remplaçant x par 100, on obtient :

$f(100) = 2 \times 100 + b$

$210 = 200 + b$

Donc $b = 210 - 200 = 10$

Ainsi $f(x) = 2x + 10$

8 (Affine ?)

On vérifie si la propriété de linéarité est vérifiée :

a. $f(0) = 5$; $f(3) = 6$ et $f(6) = 7$

$\frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{6-5}{3-0} = \frac{1}{3}$ et $\frac{f(6)-f(3)}{6-3} = \frac{7-6}{6-3} = \frac{1}{3}$

f peut donc être une fonction affine.

b. $f(1.2) = 2.4$; $f(-2) = -4$ et $f(3) = 6$

$\frac{f(1.2)-f(-2)}{1.2-(-2)} = \frac{2.4-(-4)}{1.2+2} = \frac{6.4}{3.2} = 2.$

$\frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)} = \frac{6-(-4)}{3+5} = \frac{10}{5} = 2.$

f peut donc être une fonction affine.

c. $f(8) = 13$; $f(13) = 21$ et $f(21) = 34$

$\frac{f(13)-f(8)}{13-8} = \frac{21-13}{13-8} = \frac{8}{5} = 1.6.$

$\frac{f(21)-f(13)}{21-13} = \frac{34-21}{8} = \frac{13}{8} = 1.625 \neq 1.6.$

f ne peut donc pas être affine car la propriété de linéarité n'est pas vérifiée.

d.

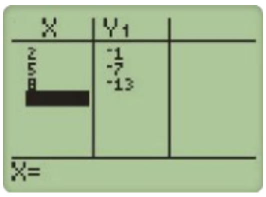
x	**– 2**	**0**	**5**
f(x)	**3,1**	**– 1,7**	**– 5,2**

$\frac{-1.7-3.1}{0-(-2)} = -\frac{4.8}{2} = -2.4$

$\frac{-5.2-(-3.1)}{5-0} = \frac{-2.1}{5} = -0.42$

f ne peut donc pas être affine car la propriété de linéarité n'est pas vérifiée.

9 (Calculatrice)



1) $\frac{-7-(-1)}{5-2} = -\frac{6}{3} = -2$

$\frac{-13-(-7)}{8-5} = -\frac{6}{3} = -2$

Donc oui cette fonction peut-être affine. On aurait dans ce cas $a = -2$.

Donc $f(x) = -2x + b$.

En utilisant une des valeurs par exemple $x = 2$:

On a $-2 \times 2 + b = -1$ d'où $-4 + b = -1$

D'où $b = -1 + 4 = 3$.

Ainsi, on aurait $f(x) = -2x + 3$

2) $f(x) = -57$ d'où $-2x + 3 = -57$

d'où $-2x = -57 - 3 = -60$

d'où $x = \frac{-60}{-2} = 30$

10 **(Fonctions affines par morceaux)**

● Courbe 1 : $f(x) = \begin{cases} -2x - 2 \ si \ x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \ si \ x > 1 \end{cases}$

● Courbe 2 : $f(x) = \begin{cases} 2 \ si \ x \leq -1 \\ -x - 1 \ si - 1 < x \leq 2 \\ -2 \ si \ x > 2 \end{cases}$

11 **(Boulangerie)**

Un boulanger fabrique chaque matin 100 croissants pour un total de 33€. Il vend ensuite ses croissants dans la journée 1,1€ pièce. On note x le nombre de croissants vendus par le boulanger.

1) $R(x) = 1.1x$ et $B(x) = 1.1x - 33$
2) $a = 1.1$ et $b = -33$

x	$-\infty$		30		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

$-\frac{b}{a} = -\frac{-33}{1.1} = 30$ et $a > 0$

3) Il faut que $B(x) \geq 0$: Au moins 30 croissants.

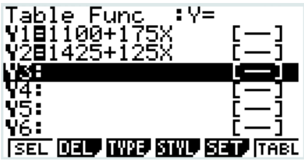
12 **(Randonnée pédestre)**

1) $v_{AB} = \frac{0.5}{4} = \frac{1}{8} = 0.125 \ km/min$
   C'est-à-dire $0.125 \times 60 = 8.25 \ km/h$
   $v_{CD} = \frac{2-1.5}{10-7} = \frac{0.5}{3} = \frac{1}{6} = 0.167 \ km/min$
   C'est-à-dire $0.167 \times 60 = 10 \ km/h$
2) La vitesse sur un tronçon correspond au coefficient directeur du segment correspondant : Plus la pente du segment est raide plus la vitesse est grande. On a donc :
   $$v_{AB} = v_{DE} < v_{CD} = v_{EF} < v_{BC}$$
   $$(8.25 \ km/h < 10 \ km/h \ < 20 \ km/h)$$

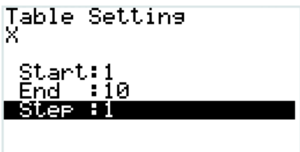
13 **(Concessionnaire)**

Soit x le nombre de voitures vendus :
On note $A(x)$ la rémunération avec le contrat A.
On note $B(x)$ la rémunération avec le contrat B.
On a donc $A(x) = 1100 + 175x$
Ainsi que $B(x) = 1425 + 125x$

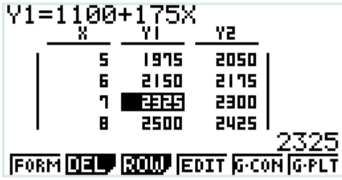
● Méthode 1 : On utilise le menu $TABLE$.
On entre les deux fonctions dans la calculatrice



On règle les paramètres du tableau : SET (F5)

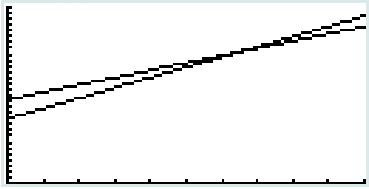


On valide (EXE) et on affiche le tableau : TABL (F6)
On descend avec les flèches et on cherche à partir de quand les valeurs de la 1ère colonne deviennent plus grande que celles de la seconde :

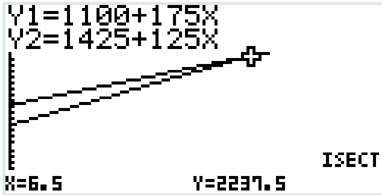


On conclut : A partir de $x = 7$ voitures le contrat A est plus intéressant.

● Méthode 2 : On utilise le menu GRAPH
Après avoir entré les fonctions on règle la fenêtre d'affichage V-Win (SHIFT/F3) avec les paramètres :
$Xmin = 0$; $Xmax = 10$; $Xscale = 1$
$Ymin = 0$; $Ymax = 3000$; $Yscale = 100$.
On valide (EXE) et on trace les courbes DRAW (F6) :



On utilise la fonction TRACE (F1) puis la fonction G-SOLV (F5)/ ISCT (F5) pour avoir le point d'intersection.



A partir de $x = 6.5$. Donc il faut vendre 7 voitures pour que le contrat A soit plus avantageux.

● Méthode 3 : Par le calcul
On résout l'équation $A(x) > B(x)$
$1100 + 175x > 1425 + 125x$
$175x - 125x > 1425 - 1100$
$50x > 325$
$x > \frac{325}{50} = 6.5$
A partir de 7 voitures le contrat A est plus avantageux

14 **(Radar)**

1) Exprimer $f(v)$ en fonction de v
   a. $f(v) = v - 5$ b. $f(v) = 0.95v$
2) Variables : VE (Vitesse enregistrée) ; VR (Vitesse retenue) ; $VMAX$ (Vitesse maximale autorisée.
   Saisir $VMAX$
   Saisir VE
   Si $VE < 100$ Alors
     $VR \leftarrow VE - 5$
   Sinon
     $VR \leftarrow 0.95 \times VE$
   Afficher VR
   Si $VR > VMAX$ Alors
     Afficher « Excès de vitesse »

15 **(Diesel/Essence)**

	Prix T.T.C.	Consommation
Modèle essence	20 300 €	5,3 L/100 km
Modèle diesel	23 250 €	3,5 L/100 km

On cherche tout d'abord, Combien coûte $1\ km$ avec chacun des deux modèles. On réalise un tableau de proportionnalité dans lequel on peut faire des produits en croix.

• Modèle Essence :

Distance	Consommation	Prix
$100\ km$	$5.3L$	
	$1\ L$	1.585 €
$1\ km$	$0.053L$	0.084 €

$\frac{5.3L}{100} = 0.053L$ et $\frac{0.053 \times 1.585}{1} \approx 0.084$

• Modèle Diesel :

Distance	Consommation	Prix
$100\ km$	$3.5L$	
	$1\ L$	1.310 €
$1\ km$	$0.053L$	0.046 €

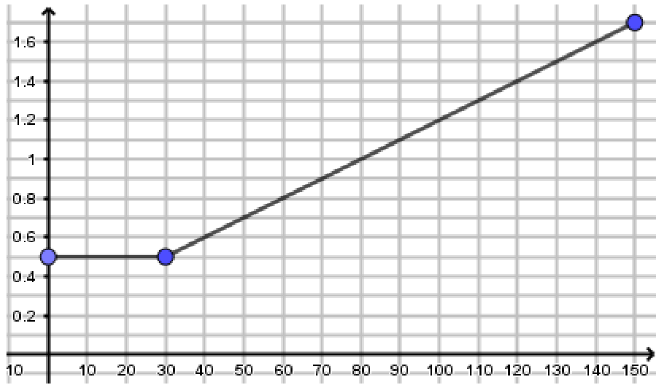
$\frac{5.3L}{100} = 0.035L$ et $\frac{0.035 \times 1.310}{1} \approx 0.046$

1) Exprimer $e(x) = 0.084x$ et $d(x) = 0.046x$
2) $f(x) = 20300 + 0.084x$
   $g(x) = 23\ 250 + 0.046x$
3) On résout $g(x) < f(x)$
   $23\ 250 + 0.046x < 20300 + 0.084x$
   $0.046x - 0.084x < 20300 - 23250$
   $-0.038x < -2950$
   $x > \frac{-2950}{-0.038} \approx 77632$ (Changement de signe car $\div$ par un nombre négatif)

   Conclusion : A partir de $77\ 632\ km$ le véhicule Diesel est plus avantageux.

16 **(Parking)**

1) Après $20\ min$: 0.50€
   Après $1h$: $0.50€ + 30 \times 0.01 = 0.80€$
2) Variables : T (temps) ; P (Prix)
   Saisir T
   Si $T < 30$ Alors
      $P \leftarrow 0.50$
   Sinon
      $P \leftarrow 0.50 + (T - 30) \times 0.01$
   Afficher P
3) $f(t) = \begin{cases} 0.50\ si\ t \leq 30 \\ 0.50 + 0.01(t - 30)\ si\ t > 30 \end{cases}$
   $0.50 + 0.01(t - 30) = 0.50 + 0.01t - 0.30$
   $= 0.01t + 0.20$
   Donc $f(t) = \begin{cases} 0.50\ si\ t \leq 30 \\ 0.01t + 0.20\ si\ t > 30 \end{cases}$
4) A partir de $30\ min$, lorsque l'on rajoute $10\ min$ on paye 0.10€ de plus.



5) On résout $f(t) = 1.60$
   $0.01t + 0.20 = 1.6$
   $0.01t = 1.4$
   $t = \frac{1.4}{0.01} = 140$
   Il est resté $140\ min$

17 **(Température)**

Soit t le temps écoulé à partir de $12h$ (en min) et $f(t)$ la température (en °C). La diminution de la température étant constante f est une fonction affine. $f(t) = at + b$

$a = \frac{1.6-2.4}{40-0} = \frac{-0.8}{40} = -\frac{2}{100} = -0.02$

$b = f(0) = 2.4$ (Température à 12h)

Donc $f(t) = -0.02t + 2.4$.

La température atteint $0°C$ lorsque la fonction s'annule. Or f s'annule en $-\frac{b}{a} = \frac{-2.4}{-0.02} = 120$

Donc au bout de $2h = 120\ min$, soit à $14h$ la température sera de $0°C$