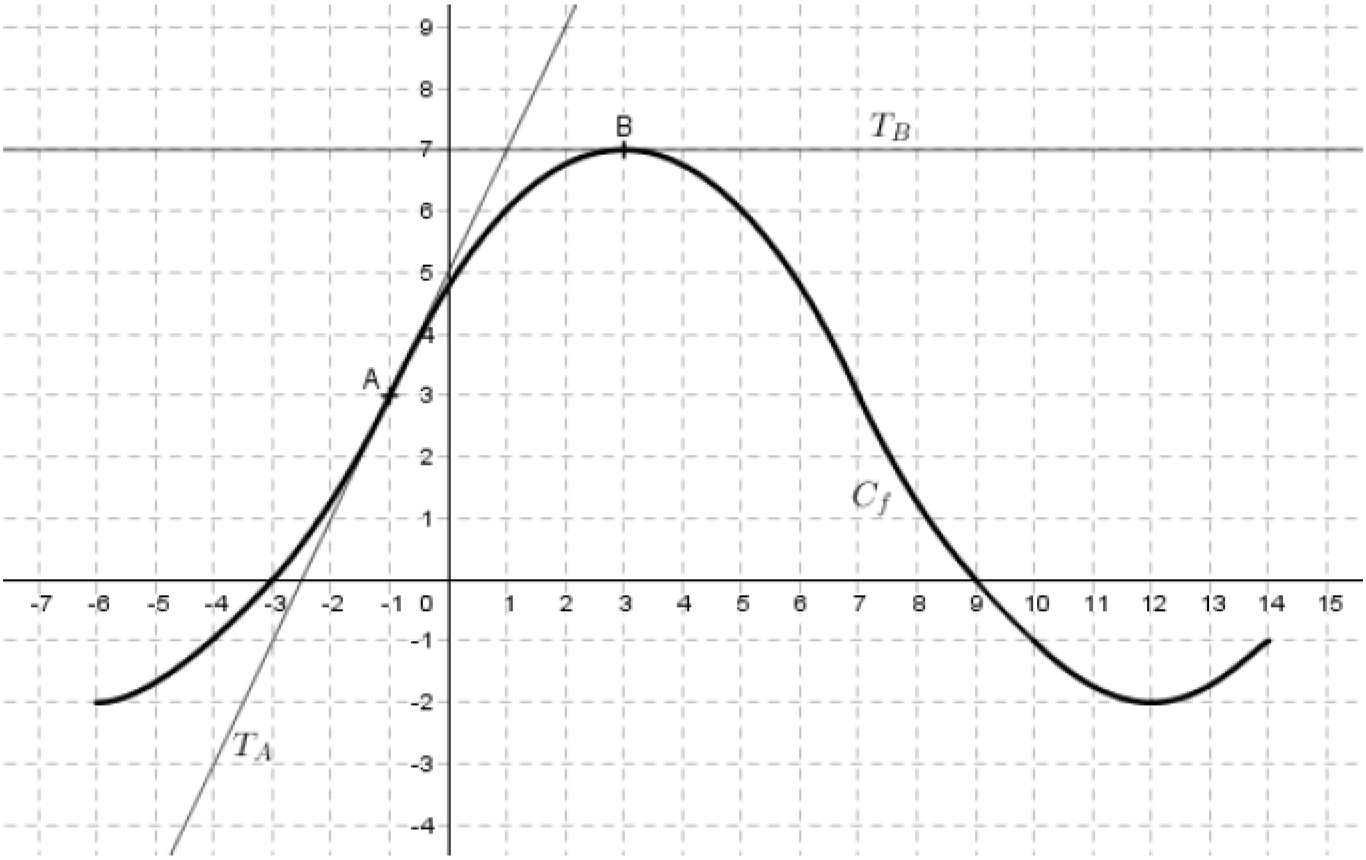
Activités – Rappels de dérivation

Activité 1 : Exercice bac – Lecture graphique

La courbe C_f ci-dessous est la représentation graphique dans un repère orthonormé d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-6\,;14]$.
La droite T_A est la tangente à la courbe C_f au point A.
La droite T_B est la tangente à la courbe C_f au point B.



Utiliser le graphique pour répondre aux questions suivantes.

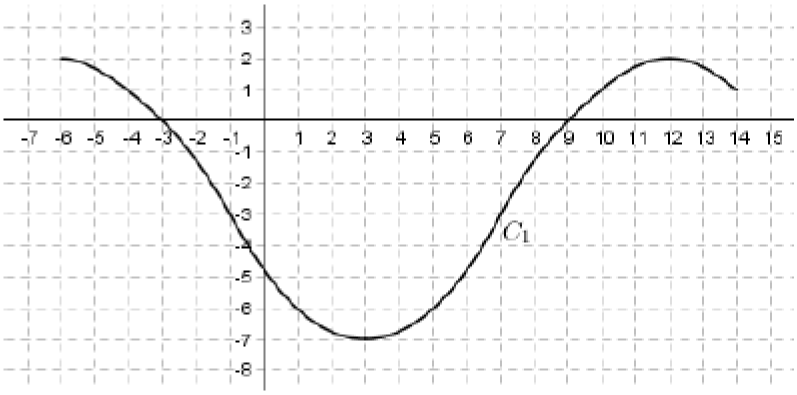
1. Déterminer $f(3)$ et $f'(-3)$.

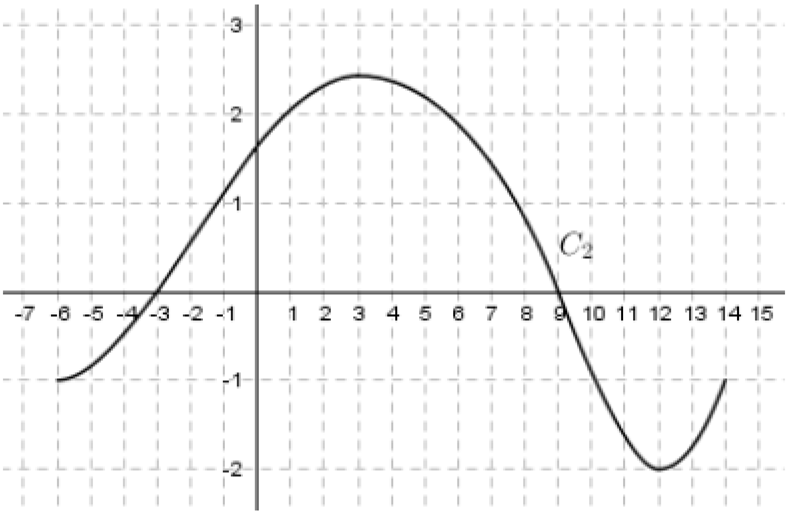
2. Déterminer $f(-1)$ et $f'(-1)$.

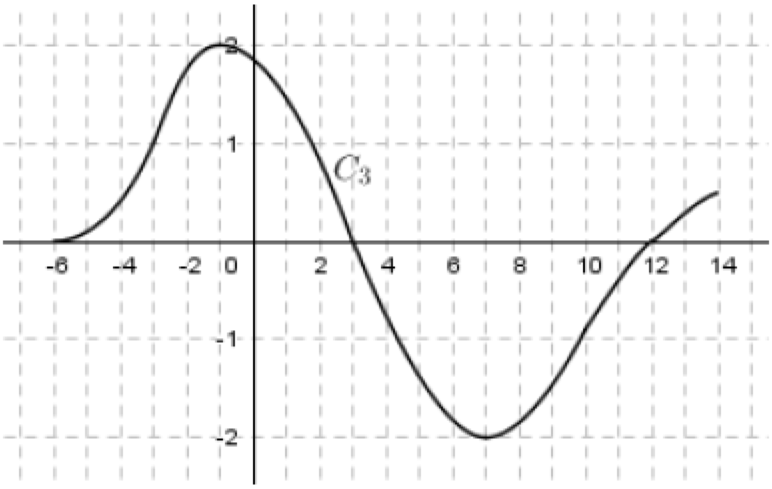
3. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 6$.

4. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-6\,;14]$ en y faisant figurer le signe de $f'(x)$.

5. Une seule des trois courbes suivantes peut être la représentation graphique de f', la fonction dérivée de la fonction f. Laquelle ? Justifier.







Activité 2 : Exercice bac – Second degré

En 2021, une entreprise compte produire au plus 60 000 téléphones portables pour la France et les vendre 800 € l'unité. On suppose que tous les téléphones produits sont vendus.

Le coût de production, en euros, est modélisé par la fonction C définie sur [0 ; 60 000] par :

$$C(x) = 0{,}01x^2 + 250x + 2\,500\,000$$

où x représente le nombre de téléphones fabriqués et vendus.

1. **a.** Calculer $C(7\,500)$. Interpréter le résultat obtenu.

b. Calculer le montant de la recette, en euros, que rapporte la vente de 7 500 téléphones.
En déduire le montant du bénéfice, en euros, pour 7 500 téléphones vendus.

2. Montrer que, pour tout $x \in [0\,;60\,000]$, le bénéfice, en euros, est défini par :

$$B(x) = -0{,}01x^2 + 550x - 2\,500\,000$$

où x représente le nombre de téléphone fabriqués et vendus.

3. **a.** Étudier les variations de la fonction B sur [0 ; 60 000].

b. En déduire le nombre de téléphone que l'entreprise doit produire pour réaliser un bénéfice maximal. Donner la valeur ce bénéfice en euros.

Activité 3 : Exercice bac – Second degré (2)

Une styliste fabrique des casquettes qu'elle met en vente. On suppose que toutes les casquettes fabriquées sont vendues. La styliste effectue une étude sur la production d'un nombre de casquettes compris entre 0 et 60. Elle estime que le coût de production en euros de x casquettes est modélisé par la fonction C dont l'expression est :

$$C(x) = x^2 - 10x + 500, \text{ où } x \text{ appartient à l'intervalle } [0\,;\,60].$$

Chaque casquette est vendue 50 euros pièce.

On note $R(x)$ le chiffre d'affaires en euros obtenu pour la vente de x casquettes, c'est-à-dire le montant de la vente de x casquettes.

1. Exprimer $R(x)$ en fonction de x.
2. Pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ; 60], on pose $D(x) = R(x) - C(x)$.
   a. Montrer que $D(x) = -x^2 + 60x - 500$.
   b. Calculer $D(10)$.
   c. En déduire une factorisation de $D(x)$.

3. a. Établir le tableau de variation de D sur [0,60].
   b. En déduire le nombre de casquettes à fabriquer et à vendre pour obtenir un profit $D(x)$ maximal. Que vaut alors ce profit ?

Activité 4 : Exercice bac – Troisième degré (1)

Suite à une épidémie dans une région, le nombre de personnes malades t jours après l'apparition des premiers cas est modélisé par $f(t) = 45t^2 - t^3$ pour tout t appartenant à $[0 ; 45]$.

1. Déterminer le nombre de personnes malades prévu par ce modèle au bout de 20 jours.

2. Montrer que, pour tout t appartenant à $[0 ; 45]$, $f'(t) = 3t(30 - t)$.

3. Déterminer le signe de $f'(t)$ sur $[0 ; 45]$.

4. Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0 ; 45]$.

5. Déterminer le jour où le nombre de personnes malades est maximal durant cette période de 45 jours et préciser le nombre de personnes malades ce jour-là.

Activité 5 : Exercice bac – Troisième degré (2)

Une entreprise fabrique x tonnes d'un certain produit, avec $x \in [0 ; 20]$. Le coût total de production de x tonnes de produit, exprimé en milliers d'euros, est donné par :

$$C(x) = x^3 - 30x^2 + 300x.$$

1. On suppose que toute la production est vendue. La recette totale, exprimée en milliers d'euros, est donnée par la fonction r définie sur $[0 ; 20]$ par : $r(x) = 108x$. La fonction associée au bénéfice exprimé en milliers d'euros est donnée par la fonction B définie pour tout x de $[0 ; 20]$ par $B(x) = r(x) - C(x)$.
   Vérifier que pour tout réel x appartenant à $[0 ; 20]$, on a : $B(x) = -x^3 + 30x^2 - 192x$.

2. Montrer que pour tout x de $[0 ; 20]$, la fonction dérivée associée au bénéfice B admet comme expression $B'(x) = 3(4 - x)(x - 16)$.

3. Dresser le tableau de variations sur $[0 ; 20]$, de la fonction B.

4. En déduire la quantité que l'entreprise doit fabriquer et vendre pour obtenir un bénéfice maximal. Donner la valeur en milliers d'euros de ce bénéfice.

5. Le directeur commercial de cette entreprise souhaite déterminer les quantités à produire et à vendre pour obtenir un bénéfice strictement positif. Il affirme que si l'entreprise fabrique et vend entre 8 et 20 tonnes de produit, alors son objectif est atteint, à savoir le bénéfice est strictement positif. Le chef de production quant à lui affirme qu'il faudrait fabriquer et vendre entre 10 et 20 tonnes pour atteindre l'objectif.
   Pour chacune des deux affirmations, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.