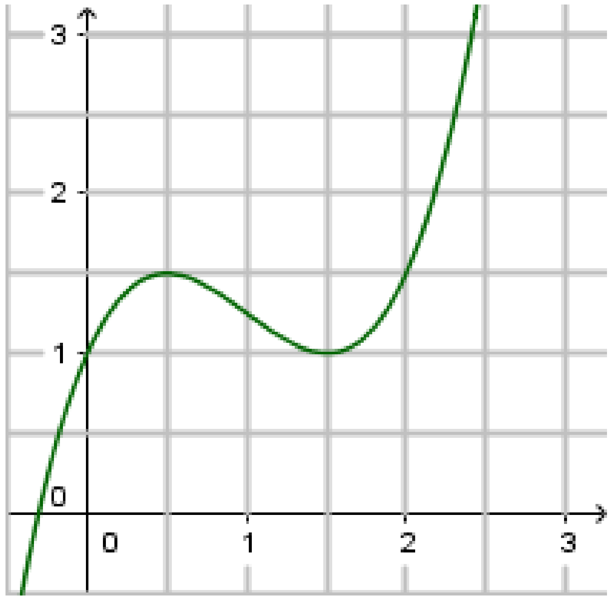
Chapitre 8 : Application à la dérivation

1 – Dérivée et sens de variation

Activité 1 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2.25x + 1$. On a tracé ci-dessous sa courbe représentative.

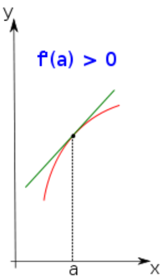


1) Déterminer graphiquement le tableau de variation de la fonction f.
2) Calculer la dérivée f' de f.
3) Réaliser le tableau de signe de la dérivée f'
4) Que remarque-t-on ?

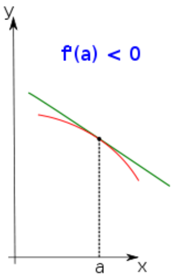
Propriété 1 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est **croissante** sur I si et seulement si la dérivée f' est **positive** sur I.
- La fonction f est **décroissante** sur I si et seulement si la dérivée f' est **négative** sur I.
- La fonction f est **constante** sur I si et seulement si la dérivée f' est **nulle** sur I.

Explication :



Dire que f' est positive sur I signifie que la « pente » de la courbe est positive en tout point a de I. La fonction est donc croissante sur I.



Dire que f' est négative sur I signifie que la « pente » de la courbe est négative en tout point a de I. La fonction est donc décroissante sur I.

Exemple 1 : A partir du tableau de signe de f', retrouver le tableau de variation de f (et vice-versa).

<table>
<tr><th>Tableau de signe de f'</th><th>Tableau de variation de f</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>f'</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>-5</td><td></td><td>3</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>f'</td><td></td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>-1</td><td></td><td>2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>↘</td><td></td><td>↗</td><td></td><td>↘</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Exemple 2 : Réaliser le tableau de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = 2x^2 - 12x + 5$.

On commence par dériver la fonction f : $f'(x) = 4x - 12$

f' est une fonction affine, elle s'annule en $x_0 = -\frac{b}{a} = -\frac{-12}{4} = 3$ et $a = 4 > 0$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	-13	↗	

$f(3) = 2 \times 3^2 - 12 \times 3 + 5 = 18 - 36 + 5 = -13$

Exemple 3 : Réaliser le tableau de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = x^3 - 1.5x^2 - 6x + 2$.

On commence par dériver la fonction f : $f'(x) = 3x^2 - 1.5 \times 2x - 6 = 3x^2 - 3x - 6$

f' est un polynôme du second degré. Pour avoir son tableau de signe on doit d'abord trouver ses racines.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 3 \times (-6) = 81$; $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-9}{6} = -1$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+9}{6} = 2$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	5.5	↘	-8	↗	

$f(-1) = (-1)^3 - 1.5 \times (-1)^2 - 6 \times (-1) + 2 = -1 - 1.5 + 6 + 2 = 5.5$

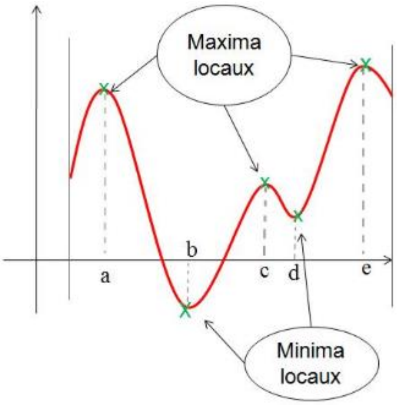
$f(2) = (2)^3 - 1.5 \times (2)^2 - 6 \times 2 + 2 = 8 - 6 - 12 + 2 = -8$

2 – Dérivée et extremums locaux

Définition 1 :

• On dit que f admet **maximum local** en a, si au voisinage de a, $f(a)$ est la plus grande des images.

• On dit que f admet **minimum local** en a, si au voisinage de a, $f(a)$ est la plus petite des images.



• La fonction a trois maximums locaux :

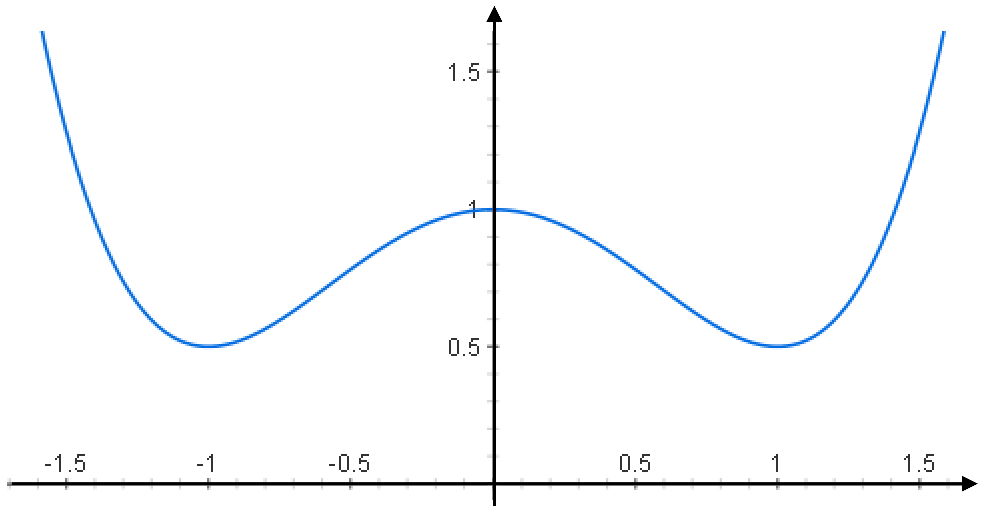
En a, c et e.

• La fonction a deux minimums locaux :

En b et d.

Exemple 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est tracée ci-dessous.

Déterminer les extremums locaux de la fonction f.

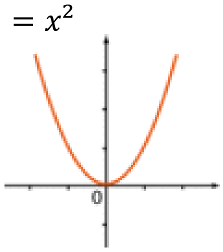


Propriété 2 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un nombre de I. La fonction f admet un extremum local en a si et seulement si la dérivée f' s'annule en a en changeant de signe.

Exemple : Fonction carré → $f(x) = x^2$

On a $f'(x) = 2x$

x	$-\infty$ $\qquad 0 \qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$



La dérivée f' s'annule en changeant de signe en 0.

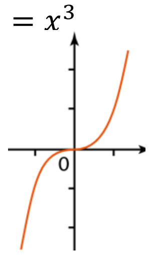
La fonction carré admet un extremum local en 0 :

Il s'agit d'un minimum local

Contre-exemple : Fonction cube → $f(x) = x^3$

On a $f'(x) = 3x^2$

x	$-\infty$ $\qquad 0 \qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$ $\quad 0 \quad$ $+$



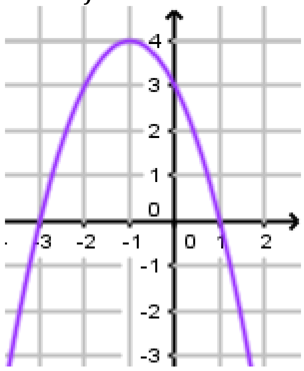
La dérivée f' s'annule sans changer de signe en 0.

La fonction cube n'admet pas d'extremum local en 0.

Application à la dérivation – Exercices

Sens de variation & Extremums

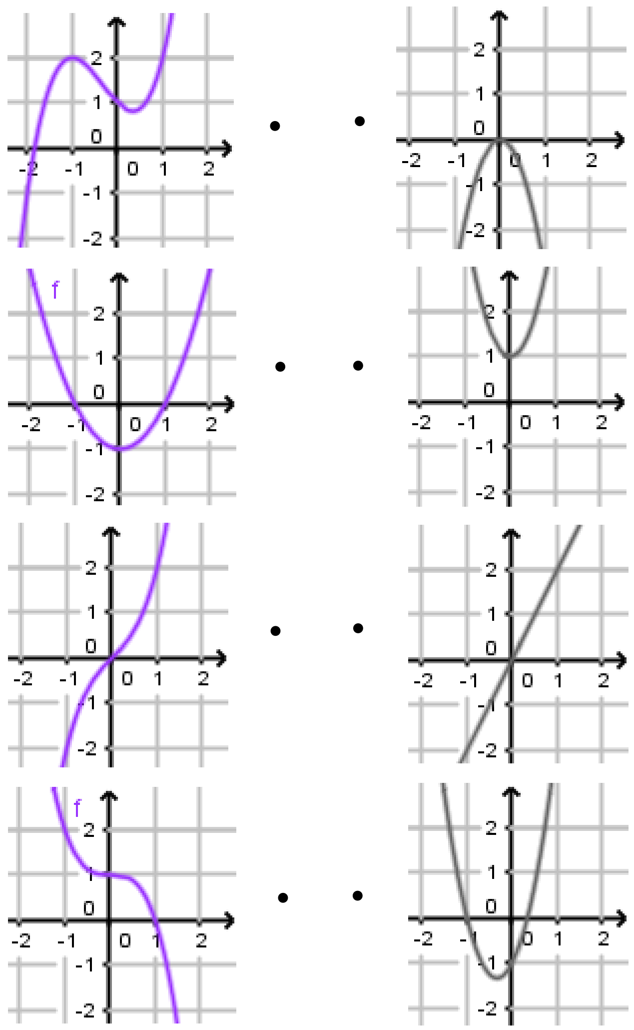
1 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. On a tracé ci-dessous la courbe représentative de sa fonction dérivée f'.



1) Réaliser le tableau de signe de f'
2) En déduire les variation de la fonction f
3) Tracer une courbe possible pour la fonction f.

2 Associer à chaque courbe de fonction f, la bonne courbe pour sa fonction dérivée.

Fonction f **Fonction dérivée f'**



3 Réaliser le tableau de variation des fonctions suivantes, puis vérifier le résultat à la calculatrice :

a. $f(x) = -2x^2 + 4x - 5$
b. $f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 12x + 2$
c. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$
d. $f(x) = x^3 + x$
e. $f(x) = \frac{5-x}{2x+4}$
f. $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$

4 Déterminer le sens de variation des suites numériques suivantes :

a. Pour tout rang n, $u_n = \frac{1}{n^2+1}$
b. Pour tout rang n, $u_n = -n^2 + 3n + 5$

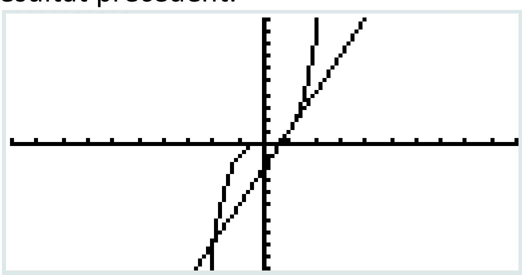
5 En étudiant utilisant la dérivation démontrer les deux propriétés suivantes :

<u>Propriété 1</u> : Soit $f(x) = ax + b$ alors
Si $a > 0$ alors f est croissante.
Si $a < 0$ alors f est décroissante.

<u>Propriété 2</u> : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ alors
Si $a > 0$ alors f admet un minimum en $\alpha = -\frac{b}{2a}$.
Si $a < 0$ alors f admet un maximum en $\alpha = -\frac{b}{2a}$.

6 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

1) Construire le tableau de variation de la fonction f.
2) Etudier les extremums locaux de la fonction f.
3) Calculer $f(-2)$.
4) En déduire le tableau de signe de la fonction f.
5) Démontrer que pour tout x de $[-2; +\infty[$ on a l'inégalité suivante : $x^3 \geq 3x - 2$.
6) Tracer sur la calculatrice dans un même repère la courbe de la fonction cube ainsi que la droite d'équation $y = 3x - 2$ afin de vérifier le résultat précédent.



Problèmes d'optimisation

7 (Boite sans couvercle)

La problématique de l'exercice est la suivante : A l'aide d'un simple feuille A4, comment construire une boite sans couvercle (voir *Figure 1*) de volume maximale ?

Le patron d'une telle boite est obtenue en découpant 4 coins de même dimension sur la feuille A4 (voir *Figure 2*). En fonction de la taille x du coin découpé on obtiendra une boite de volume différente.

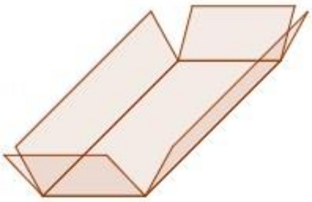


Figure 1

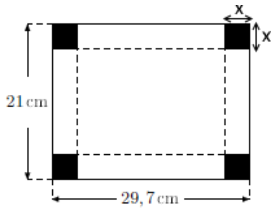


Figure 2

1) On note $V(x)$ le volume de la boite obtenue en découpant un coin de x cm.
   a. Calculer $V(1)$ et $V(5)$.
   b. Quel est l'ensemble de définition de la fonction V ?
   c. Exprimer $V(x)$ en fonction de x puis montrer que
   $$V(x) = 4x^3 - 10{,}14x^2 + 623{,}7x$$
2) Etude de la fonction V
   a. Calculer $V'(x)$
   b. Réaliser le tableau de variation de la fonction V.
   c. Quel est le maximum de la fonction V sur son ensemble de définition. En quelle valeur est-il atteint ?
3) Conclusion
   a. Répondre à la problématique
   b. Est-il possible de construire une boite d'exactement $1L$?

8 (Bénéfice maximal)

Une entreprise produit des crayons de couleur. Lorsque la quantité q (exprimée en milliers) est comprise entre 4 et 10, on admet que le coût de production journalier (exprimé en euros) est donnée par $C(q) = q^3 - 48q - 600$

L'entreprise vend 99€ chaque milliers de crayons.

1) Déterminer les coûts fixes.
2) a. Exprimer la recette pour la vente de q milliers de crayons
   b. Montrer que le bénéfice journalier $B(q)$, exprimé en euros, est donnée par
   $$B(q) = -q^3 + 147q - 600$$
3) Calculer $B'(q)$.
4) a. Réaliser le tableau de variation de la fonction B
   b. En déduire la quantité de crayon que l'entreprise doit produire quotidiennement pour obtenir un bénéfice maximal

9 (Coût moyen minimal)

Dans un restaurant, le coût total en euros pour la fabrication de x repas est donné par la relation $C(x) = 2x^2 - 230x + 7200$ pour x compris entre 30 et 120.

On appelle **coût moyen** (en euros) et on note $C_M(x)$, le coût par repas lorsque x repas sont produits. On a donc $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$,

1) Quel est le coût moyen de 50 repas ?
2) Exprimer $C_M(x)$ en fonction de x.
3) Calculer de deux façons différentes la dérivée de la fonction $C_M(x)$.
4) Etudier le sens de variation de la fonction $C_M(x)$ sur $[30; 120]$.
5) Combien faut-il fabriquer de repas pour que le coût moyen soit minimal ? Quel est ce coût moyen minimal

10 (Coût moyen et coût marginal)

Une entreprise produit x unités

On rappelle les définitions suivantes :

• Le **coût total** $C(x)$ est le prix que coûte la production de x unités à l'entreprise

• Le **coût moyen** $C_M(x)$ est le coût par unité lorsque que x unités sont produites c'est-à-dire $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$

• Le **coût marginal** $C_m(x)$ est le coût d'une unité supplémentaire sachant que x unités sont déjà produite. Il est donné par $C_m(x) = C'(x)$.

Le but de l'exercice est d'établir le principe économique suivant :

« Lorsque le coût moyen est minimal alors le coût marginal est égal au coût moyen »

1) Reprendre l'exercice précédent et vérifier ce principe économique
2) Une entreprise fabrique des bonbons. Le coût total de fabrication est donné par
   $$C(x) = x^3 - 15x^2 + 75x$$
   Vérifier le principe économique sur ce deuxième exemple.
3) Démontrer le principe économique.