# Chap N4 : Calcul littéral

## 1 – Expression littérale

Définition 1 : Une **expression littérale** est une expression mathématique qui contient une ou plusieurs **lettres** qui désignent des nombres.

Exemple 1 : Voici quelques exemples d'expressions littérales.

● $A = 2 \times x + 1$ où $x$ désigne un nombre.

● $B = n \times (n + 1)$ où $n$ désigne un nombre entier.

● Le périmètre d'un carré est donnée par $4 \times c$ où $c$ désigne le côté d'un carré.

● Le périmètre d'un rectangle est donnée par $2 \times L + 2 \times l$ où $L$ et $l$ désignent la longueur et la largeur du rectangle.

Remarques :

● Si une même lettre apparaît plusieurs fois dans l'expression elle désigne le même nombre.

● Pour **évaluer** une expression littérale, on **remplace** chaque lettre par la valeur donnée.

Exemple 2 : Evaluer les expressions littérales pour les valeurs données.

● $A = 2 \times x + 1$ : . $x = 2$ : $A = 2 \times 2 + 1 = 4 + 1 = 5$.

. $x = 0.5$ : $A = 2 \times 0.5 + 1 = 1 + 1 = 2$.

● $B = n \times (n + 1)$ : . $n = 10$ : $B = 10 \times (10 + 1) = 10 \times 11 = 110$

. $n = -5$ : $B = (-5) \times (-5 + 1) = (-5) \times (-4) = +20$

● Quelle est le périmètre d'un carré de côté $c = 3\ cm$ ?

$P = 4 \times c = 4 \times 3 = 12$. Le périmètre du carré est donc de $12\ cm$.

● Quelle est le périmètre d'un rectangle de longueur $L = 5\ cm$ et de largeur $l = 2\ cm$ ?

$P = 2 \times L + 2 \times l = 2 \times 5 + 2 \times 2 = 14$ Le périmètre du rectangle est donc de $14\ cm$.

Convention d'écriture : Pour simplifier l'écriture d'une expression littérale on peut supprimer le symbole « $\times$ » avant une lettre ou une parenthèse (mais pas entre deux nombres).

Exemple 3 : Simplifier les expressions littérales suivantes :

● $2 \times x + 3 \times y = 2x + 3y$

● $2 \times (x + 5) = 2(x + 5)$

● $(x + 1) \times (x - 2) = (x + 1)(x - 2)$

● $x \times y \times z = xyz$

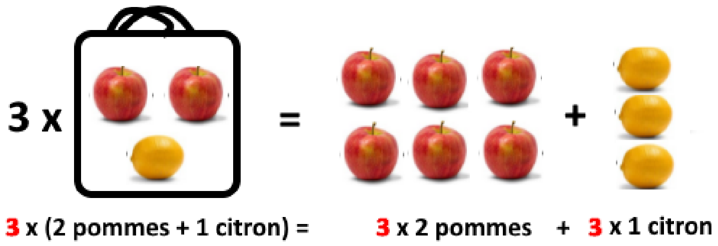
● $x \times (x - 3) = x(x - 3)$

● $2 \times x + 3 \times 5 = 2x + 15$

## 2 – Distributivité

Principe de la distributivité :

*Lorsqu'on a plusieurs sacs contenant différents fruits, on peut déballer les sacs pour regrouper les fruits entre eux.*




Propriété 1 : **(Distributivité)** On considère trois nombres $k$, $a$ et $b$. On a les égalités suivantes :

- $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$
- $k \times (a - b) = k \times a - k \times b$

Remarque : Avec la convention d'écriture, on obtient :

- $k(a + b) = ka + kb$
- $k(a - b) = ka - kb.$

Exemple 4 : Calculer astucieusement à l'aide de la distributivité :

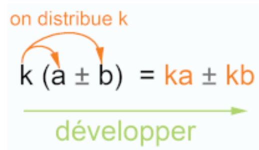
- $15 \times 103 = 15 \times (100 + 3) = 15 \times 100 + 15 \times 3 = 1500 + 45 = 1545$
- $13 \times 98 = 13 \times (100 - 2) = 1300 - 2 \times 13 = 1300 - 26 = 1274$

Définition 2 : **Développer** une expression c'est tranformer un produit en une somme.

Remarque : Pour développer une expression, on utilise la distributivité dans le sens **direct** :

On **distribue** le facteur $k$ sur les deux termes de la somme $a$ et $b$.

Cela permet de **supprimer** les parenthèses qui protégeaient l'addition.




Exemple 4 : Développer les expressions littérales suivantes :

- $A = \underset{k}{3} \times (\underset{a}{x} + \underset{b}{2})$

  $A = \underset{k}{3} \times \underset{a}{x} + \underset{k}{3} \times \underset{b}{2}$

  $A = 3x + 6$

- $B = \underset{k}{2}(\underset{a}{1} - \underset{b}{4x})$

  $B = \underset{k}{2} \times \underset{a}{1} - \underset{k}{2} \times \underset{b}{4x}$

  $B = 2 - 8x$

- $C = \underset{k}{-2} \times (\underset{a}{2x} - \underset{b}{5})$

  $C = \underset{k}{-2} \times \underset{a}{2x} - (\underset{b}{-2}) \times 5$

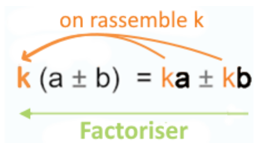
  $C = -4x - (-10) = -4x + 10$

Définition 3 : **Factoriser** une expression c'est tranformer une somme en un produit.

Remarque : Pour factoriser une expression, on utilise la distributivité dans le sens **indirect** :

On identifie un **facteur commun** $k$ dans les termes de la somme.

Puis on le **rassemble** en un facteur unique devant une parenthèse.




Exemple 5 : Factoriser les expressions littérales suivantes :

- $A = 5x + 10$

  $A = \underset{k}{5} \times \underset{a}{x} + \underset{k}{5} \times \underset{b}{2}$

  $A = \underset{k}{5} \times (\underset{a}{x} + \underset{b}{2})$

  $A = 5(x + 2)$

- $B = 8x - 4$

  $B = \underset{k}{4} \times \underset{a}{2x} + \underset{k}{4} \times \underset{b}{1}$

  $B = \underset{k}{4} \times (\underset{a}{2x} - \underset{b}{1})$

  $B = 4(2x - 1)$

- $C = 12x - 7x$

  $C = \underset{a}{12} \times \underset{k}{x} - \underset{b}{7} \times \underset{k}{x}$

  $C = (\underset{a}{12} - \underset{b}{7}) \times \underset{k}{x}$

  $C = 5 \times x = 5x$

## 3 – Réduire une expression

Réduire (ou simplifier) une expression, c'est l'écrire sous la forme la plus simple possible, c'est-à-dire avec un nombre minimum de facteurs et de termes.

Propriété 2 : **(Règles d'or)** : Pour tout nombre $x$, on a les égalités suivantes :

- $x + x = 2 \times x = 2x$
- $x \times x = x^2$
- $x \times x \times x = x^3$
- $1 \times x = x$
- $-1 \times x = -x$
- $0 \times x = 0$

Remarque : Pour simplifier une expression sans parenthèses, on commence par **réduire** les produits, puis on **regroupe** et on **factorise** les termes avec la même lettre et le même degré.

Exemple 5 : Réduire les expressions suivantes :

- $4x \times 5 = 4 \times x \times 5 = 4 \times 5 \times x = 20x$
- $2x \times 3x = 2 \times x \times 3 \times x = 2 \times 3 \times x \times x = 6x^2$
- $-3x - 5 + 4x - 7 = -3x + 4x - 5 - 7 = (-3 + 4)x - 12 = 1x - 12 = x - 12$
- $y + 3x - 5y + 6x = 3x + 6x + 1y - 5y = (3 + 6)x + (1 - 5)y = 9x + 4y$
- $-3x \times 4x + 2x \times 2x - 2 \times 0.5x = -12x^2 + 4x^2 - x = (-12 + 4)x^2 - x = -8x^2 - x$
- $x^2 \times 8x + x \times 3y - 2x \times 4x^2 = 8x^3 + 3xy - 8x^3 = (8 - 8)x^3 + 3xy = 0x^3 + 3xy = 3xy$

Propriété 3 : Dans une expression, pour enlever une paire de parenthèses précédées :

- D'un signe $+$ : On supprime '$+(\ )$' et on conserve les signes des termes entre parenthèses.
- D'un signe $-$ : On supprime '$-(\ )$' On change les signes des termes entre parenthèses.
- D'un signe $\times$ (ou directement d'un facteur) : On applique la distributivité.

Exemple 6 : Simplifier les expressions suivantes :

- $A = 4 + (5a - 7)$
  $A = 4 + 5a - 7$
  $A = 5a - 7 + 4$
  $A = 5a - 3$
- $B = 2 - (5b - 7) + b$
  $B = 2 - 5b + 7 + b$
  $B = -5b + 1b + 2 + 7$
  $B = -4b + 9$
- $C = (2c + 2) - 2c + 1$
  $C = 2c + 2 - 2c + 1$
  $C = (2 - 2)c + 2 + 1$
  $C = 0c + 3 = 3$
- $D = -(-4 - 5x) + x - 1$
  $D = 4 + 5x + x - 1$
  $D = 5x + x + 4 - 1$
  $D = 4x + 3$
- $E = 2x \times (0.5x - 5)$
  $E = 2x \times 0.5x - 2x \times 5$
  $E = 1x^2 + 10x$
  $E = x^2 + 10x$
- $F = -2(t^2 - t) + t^2$
  $F = -2t^2 - 2 \times (-t) + t^2$
  $F = -2t^2 + t^2 + 2t$
  $F = -2t^2 + t^2 + 2t$
  $F = -t^2 + 2t$

## 4 – Double distributivité

Dans certaines expressions, on trouve une multiplication entre des parenthèses protégeant chacun une somme. Pour pouvoir les retirer, on utilise alors la double distributivité.

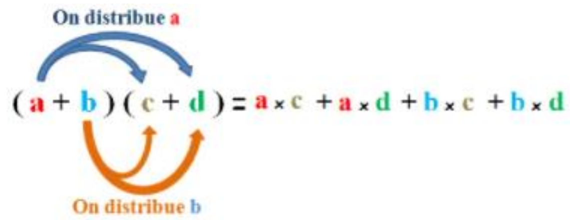
> <u>Propriété 4</u> : **(Double distributivité)** On considère des nombres $a, b, c, d$. On a l'égalité :
>
> $$(a+b)\times(c+d) = a\times c + a\times d + b\times c + b\times d$$

<u>Remarque</u> : Avec la convention d'écriture, on obtient : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

<u>Principe de la double distributivité</u> :

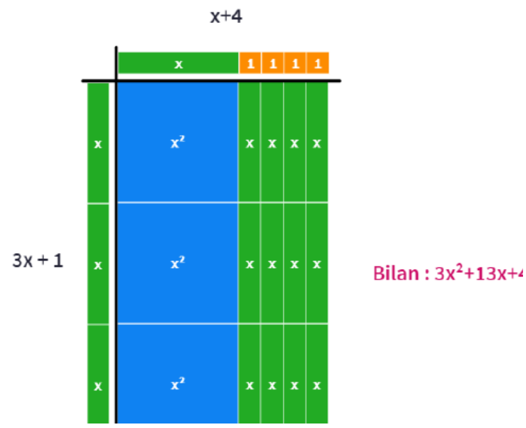
● *Pour développer le **double-produit** $(a+b)(c+d)$ on commence par distribuer $a$ puis on distribue $b$.*

● *On obtient alors une somme de 4 termes que l'on **réduit** puis on **regroupe** ceux qui sont de même degré.*




<u>Remarque</u> : Pour éviter les erreurs de signe, on peut transformer mentalement les soustractions en addition avant d'appliquer la double distributivité.

<u>Exemple 7</u> : Développer les expressions suivantes :




● $A = (\underbrace{3x}_{a} + \underbrace{1}_{b}) \times (\underbrace{x}_{c} + \underbrace{4}_{d})$

$A = 3x \times x + 3x \times 4 + 1 \times x + x \times 4$

$A = 3x^2 + 12x + x + 4$

$A = 3x^2 + 13x + 4$

● $B = (\underbrace{2x}_{a} \underbrace{-1}_{b})(\underbrace{3}_{c} \underbrace{-x}_{d})$

$B = 2x \times 3 + 2x \times (-x) + (-1) \times 3 + (-1) \times (-x)$

$B = 6x + (-2x^2) + (-3) + 1x$

$B = -2x^2 + 7x - 3$

● $C = (x-4)^2$

$C = (\underbrace{x}_{a} \underbrace{-4}_{b})(\underbrace{x}_{c} \underbrace{-4}_{d})$

$C = x \times x + x \times (-4) + (-4) \times x + (-4) \times (-4)$

$C = x^2 + (-4x) + (-4x) + 16$

$C = x^2 - 8x + 16$