Chap N1 : Divisibilité

1 – Division euclidienne

On considère a et b deux nombres entiers.

Définition 1 : Faire la division euclidienne de a par b, c'est trouver deux nombres entiers q et r tel que $a = b \times q + r$ avec r plus petit que b : $r < b$

Remarque : Pour trouver les nombres q et r, on peut « poser » la division.

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline r & q \end{array}$$

- a est appelé le **dividende.**
- b est appelé le **diviseur.**
- q est appelé le **quotient.**
- r est appelé le **reste.**

$a = b \times q + r$

- Le quotient et le reste d'une division euclidienne sont **uniques.**

Exemple 1 : Effectuer les divisions euclidiennes suivantes :

- 183 par 12 :

$$\begin{array}{r|l} 183 & 12 \\ \hline 63 & 15 \\ 3 & \end{array}$$

On peut donc écrire :

$$183 = 12 \times 15 + 3$$

Quotient : $q = 15$

Reste : $r = 3$

- 208 par 10 :

Sans poser la division on peut faire mentalement $20 \times 10 = 200$ et il reste 8 :

$$208 = 10 \times 20 + 8$$

Quotient : $q = 20$

Reste : $r = 8$

- 600 par 25 :

$$\begin{array}{r|l} 600 & 25 \\ \hline 100 & 24 \\ 0 & \end{array}$$

$$600 = 25 \times 24 + 0$$

Quotient : $q = 24$

Reste : $r = 0$

Calculatrice : Pour effectuer une division euclidienne à la calculatrice on utilise la touche $\boxed{\vdash}$.

Remarque : La division euclidienne permet de résoudre des problèmes de partage.

Exemple 2 : Pour la réalisation de fraisiers individuels, un pâtissier dispose de 10 barquettes de 47 fraises. Il doit utiliser 11 fraises par gateaux. Combien de gâteau de pourra-t-il réaliser ? Combien de fraises restera-t-il ?

$$\begin{array}{r|l} 470 & 11 \\ \hline -44 & 42 \\ \hline 30 & \\ -22 & \\ \hline 8 & \end{array}$$

- $47 \times 10 = 470$ fraises au total.
- On fait la division euclidienne de 470 par 11 :

  $470 = 11 \times 42 + 8$
- Il pourra réaliser 42 gâteaux et manger les 8 fraises restantes.

2 – Multiples et diviseurs

Définition 2 : Lorsque le reste de la division euclidienne de a par b est égal à 0, on dit que a est un **multiple** de b et que b est un **diviseur** de a.

Remarque : On dit également que a est **divisible** par b et que b **divise** a.

Exemple 3 : On a vu (exemple 1) que le reste de la division euclidienne de 600 par 25 est 0 :

Ainsi, 600 est un multiple de 25 et que 25 est un diviseur de 600.

On dit aussi que 600 est divisible par 25 et que 25 divise 600.

Critères de divisibilité :

Les nombres…	**Critère de divisibilité :**	**Exemples :**
Divisible par 10	Se terminent par 0.	50 ; 180 ; 1000
Divisible par 5	Se terminent par 0 ou 5.	50 ; 65 ; 125
Divisible par 2	Se terminent par 0; 2; 4; 6 ou 8.	62 ; 688 ; 210
Divisible par 3	Si la somme de ses chiffres est divisible par 3.	21 ; 450 ; 333
Divisible par 4	Si les deux derniers chiffres forment un multiple de 4.	116 ; 460 ; 224
Divisible par 9	Si la somme de ses chiffres est divisible par 9.	81 ; 459 ; 972

3 – Nombres premiers

Définition 3 : Un nombre **premier** est un nombre qui a deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemple 4 : Les dix premiers nombres premiers sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29

Remarques :
- 1 n’est pas premier car il ne possède **qu’un seul** diviseur : lui-même.
- 0 n’est pas premier car il possède une **infinité** de diviseurs :
  Il est divisible par n’importe quel nombre.

Propriété 1 : Tout nombre entier peut se décomposer de façon unique comme un produit de nombres premiers.

Exemple 5 : Décomposer 30 et 72 en produit de facteurs premiers.

- $30 = 3 \times 10 = 3 \times 2 \times 5 = 2 \times 3 \times 5.$
- $36 = 8 \times 9 = 2 \times 4 \times 3 \times 3 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2.$