Chap N5 : Equations

1 – La notion d'équation

Définition 1 : Une **équation** est une égalité avec une **inconnue**, c'est-à-dire une lettre (souvent « x ») qui désigne un nombre dont on ne connaît pas sa valeur.

Exemple 1 :

● $2x + 6 = 10$ est une équation. L'inconnue est la lettre « x ».

● $n^2 = 2n$ est une équation dont l'inconnue est la lettre « n »

Définition 2 :

• Une **solution** de l'équation est une valeur de l'inconnue qui rend l'égalité vraie.

• **Résoudre** une équation, c'est trouver toutes les solutions de cette équation.

Remarque : Une équation peut avoir une, plusieurs ou aucune solution(s).

Exemple 1 : Vérifier si les nombres 1 et 2 sont des solutions de l'équation $2x + 6 = 10$

● On remplace x par 1 : $2 \times 1 + 6 = 2 + 6 = 8$. Or $8 \neq 10$ donc 1 n'est pas solution.

● On remplace x par 2 : $2 \times 2 + 6 = 4 + 6 = 10$. Donc l'égalité est vraie et 2 est solution.

Exemple 2 : Résoudre l'équation $n^2 = 2n$.

On cherche tous les nombres dont son carré est égal à sont double. Les solutions sont :

● 0 car $0^2 = 0$ et $2 \times 0 = 0$

● 2 car $2^2 = 4$ et $2 \times 2 = 4$

Exemple 3 : Donner un exemple d'équation qui n'a pas de solution.

$0 \times x = 10$; $x^2 = -1$; $\frac{1}{x} = 0$; etc.

Remarque : Pour résoudre une équation, on peut parfois utiliser la technique de l'égalité à trou : On remplace l'inconnue par une case vide qu'il faut remplir avec le bon nombre.

Exemple 4 : Utilise une égalité à trou pour résoudre les équations suivantes

a. $2 + x = 6 \rightarrow 2 + \square = 6 \rightarrow 2 + 4 = 6 \rightarrow x = 4 \rightarrow$ La solution est 4

b. $5x = -45 \rightarrow 5 \times \square = -45 \rightarrow 5 \times (-9) = -45 \rightarrow x = -9 \rightarrow$ La solution est -9

c. $3x - 15 = 0 \rightarrow 3 \times \square - 15 = 0 \rightarrow 3 \times 5 - 15 = 0 \rightarrow x = 5 \rightarrow$ La solution est 5.

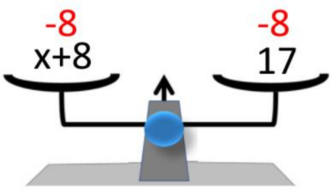
d. $x + 2x = 15 \rightarrow \square + 2 \times \square = 15 \rightarrow 5 + 2 \times 5 = 15 \rightarrow x = 5 \rightarrow$ La solution est 5.

2 – Techniques de résolution

Principe de la Balance : On peut voir une égalité comme une balance à l'équilibre : Lorsque l'on fait la même opération de chaque côté de la balance, celle-ci reste équilibrée. De même si on effectue la même opération des deux côtés d'une égalité on ne change pas l'égalité.

Propriété 1 : Si on **ajoute** ou si on **soustrait** le même nombre aux deux membres de l'égalité, l'égalité ne change pas.

Exemple 5 : Résoudre les équations $x + 8 = 17$ et $x - 7 = -5$



On soustrait 8

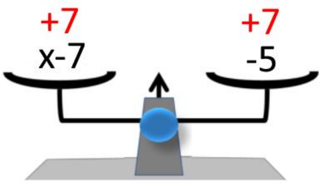
$x + 8 = 17$

$x + 8 - 8 = 17 - 8$

$x = 17 - 8$

$x = 9$

La solution de $x + 8 = 17$ est 9



On ajoute 7

$x - 7 = -5$

$x - 7 + 7 = -5 + 7$

$x = -5 + 7$

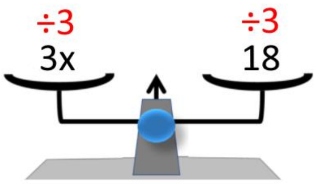
$x = 2$

La solution de $x - 7 = -5$ est 2

Remarque : Lorsqu'un terme passe de l'autre côté de l'égalité, il **change** de signe.

Propriété 2 : Si on **multiplie** ou si on **divise** par un même nombre **non nul** les deux membres de l'égalité, l'égalité ne change pas.

Exemple 6 : Résoudre les équations $3x = 18$ et $0.5x = 4$



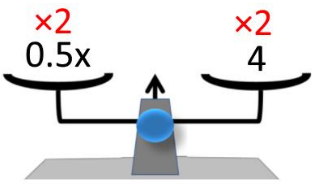
On divise par 3

$3x = 18$

$\frac{3x}{3} = \frac{18}{3}$

$x = 6$

La solution de $3x = 18$ est 6.



On multiplie par 2

$0.5x = 4$

$2 \times 0.5x = 2 \times 4$

$x = 8$

La solution de $0.5x = 4$ est 8.

Méthode : Pour résoudre une équation, on cherche à **isoler** l'inconnue.

Exemple 7 : Résoudre les équations suivantes :

- $2x + 5 = -3$

$2x + 5 - 5 = -3 - 5$ *On commence par éliminer les termes*

$2x = -8$

$\frac{2x}{2} = \frac{-8}{2}$ *On élimine le facteur devant le « x ».*

$x = -4$

La solution de l'équation est -4.

- $3x = 8 - x$

$3x + x = 12 - x + x$ *On commence par regrouper les « x » d'un côté.*

$4x = 8$

$\frac{4x}{4} = \frac{8}{4}$ *On élimine le facteur devant le « x ».*

$x = 2$

La solution de l'équation est 2.

3 – Résoudre un problème

On utilise parfois une équation pour résoudre un problème. Pour cela, on peut utiliser la méthode présentée ci-dessous.

Problème : Alice et Bob vont jouer pour la première fois au casino et décide de miser la même somme d'argent en euros. Après deux tours de jeu :

● Alice a d'abord triplé la somme qu'elle avait au départ puis elle a ensuite perdu 10€.

● Bob lui a d'abord doublé la somme qu'il avait au départ puis il a ensuite gagné 5€.

Alice dit alors à Bob : « Regarde ! On a encore la même somme d'argent tous les deux »

Quelle somme d'argent ont-ils misé au départ ? Combien d'argent ont-ils maintenant ?

Inconnue : Quelle est la valeur inconnue dans le problème ? On la désigne avec une lettre.

● La valeur inconnue dans le problème est la somme misée au départ par les deux amis.

● Soit x la somme misée par Alice et Bob.

Mise en équation : On écrit une équation qui traduit le problème en termes mathématiques.

● Après deux tours : Alice possède $3x - 10$ euros et Bob possède $2x + 5$ euros

● Comme ils ont encore la même somme d'argent on peut dire que : $3x - 10 = 2x + 5$

Résolution : On résoud l'équation posée précédemment

$3x - 10 = 2x + 5$

$3x - 10 - 2x = \cancel{2x} + 5 \cancel{- 2x}$ *On regroupe les « x » d'un côtés*

$3x \cancel{- 10} - 2x \cancel{+ 10} = +5 + 10$ *…et les nombres de l'autre*

$3x - 2x = +5 + 10$ *On regroupe*

$x = 15$

La solution de l'équation est 15.

Conclusion : On interprète la solution dans le cadre du problème posé.

● $x = 15$ signifie que la somme de départ était de 15€

● Pour savoir combien d'argent ils-ont maintenant peut remplacer x par 15 dans l'équation :

. $3x - 10 = 3 \times 15 - 10 = 45 - 10 = 35$

. $2x + 5 = 2 \times 15 + 5 = 35$.

Ils ont maintenant tous les deux 35 €