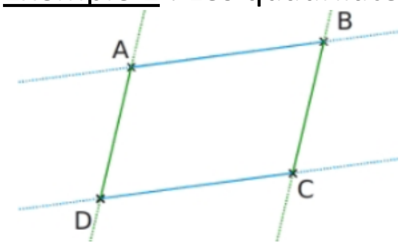
Chap G4 : Parallélogrammes

1 – Généralités

a. Définition

Définition 1 : Un **parallélogramme** est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.

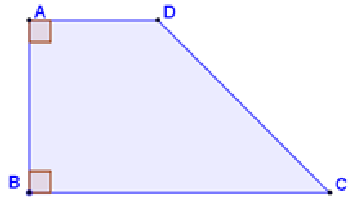
Exemple 1 : Les quadrilatères $ABCD$ sont-ils des parallélogrammes ?



$(AB) \parallel (CD)$

$(AD) \parallel (BC)$

$ABCD$ est un **parallélogramme**.



$(AD) \parallel (BC)$

$(AB) \nparallel (CD)$

$ABCD$ est un **trapèze**.

b. Propriétés

Propriété 1 : Si un quadrilatère est un parallélogramme alors :

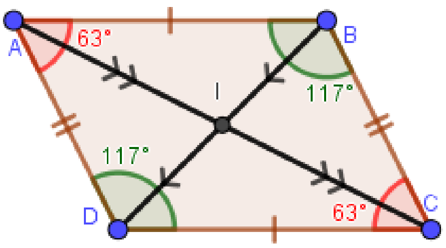
(1): Ses côtés opposés sont de même longueur.

(2): Ses angles opposés sont de même mesure.

(3): Ses diagonales se coupent en leur milieu.

(4): Il admet un centre de symétrie qui est le point d'intersection des diagonales.

Exemple 2 : Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme. Vérifier les propriétés ci-dessus.



(1): $AB = CD = 4\ cm$ et $AD = BC = 3.2\ cm$.

(2): $\hat{A} = \hat{C} = 63°$ et $\hat{B} = \hat{D} = 117°$

(3): $BI = ID = 2\ cm$ et $AI = IC = 3.1\ cm$.

(4): I est le centre de symétrie du quadrilatère $ABCD$.

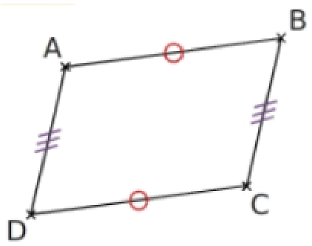
La propriété précédente admet une **réciproque** :

Propriété 2 : Un quadrilatère est un parallélogramme s'il vérifie l'une des quatre propriétés précédentes.

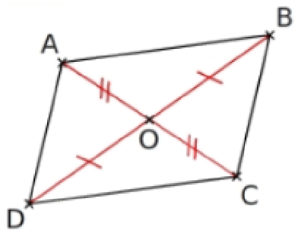
Pour **reconnaître** un parallélogramme on dispose également du critère suivant :

Propriété 3 : Un quadrilatère est un parallélogramme s'il possède **deux** côtés opposés qui sont à la fois parallèles et de même longueur.

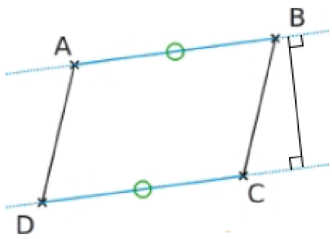
Exemple 3 : Justifier pourquoi les quatrilatères ci-dessous sont des parallélogrammes



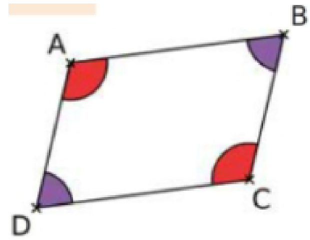
Les côtés opposés sont égaux



Les diagonales se coupent en leur milieu



Il y a 2 côtés opposés parallèles et égaux.

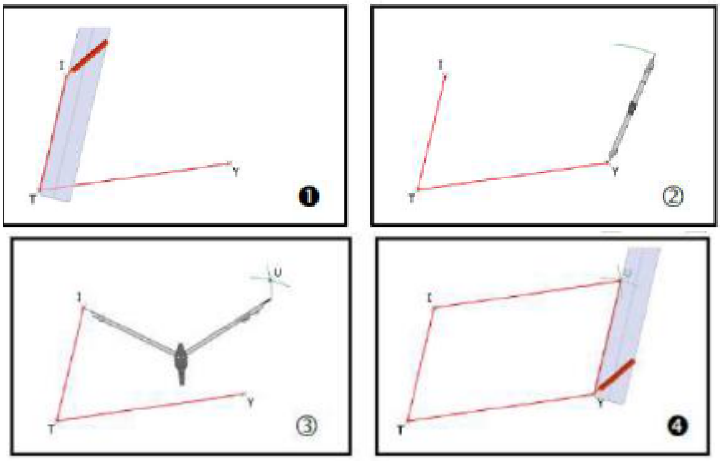


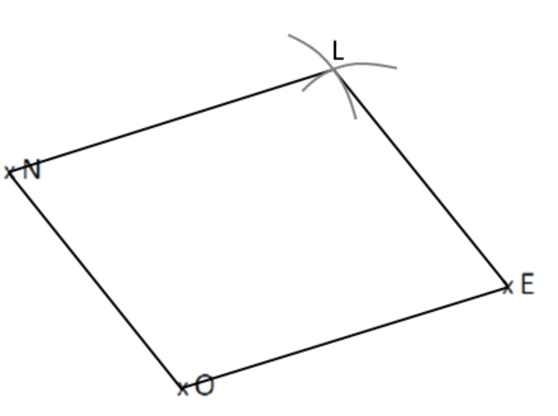
Les angles opposés sont égaux

c. Construction

Exemple 4 **(avec 3 sommets)** : Construire le parallélogramme $NOEL$.

Méthode : Avec la règle et le compas

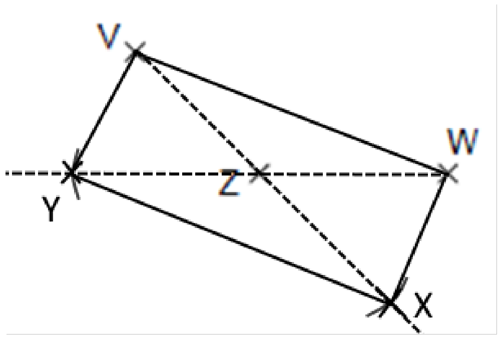




Exemple 5 **(à partir du centre)** : Construire le parallélogramme $VWXY$ de centre Z

Méthode : Avec la règle et le compas

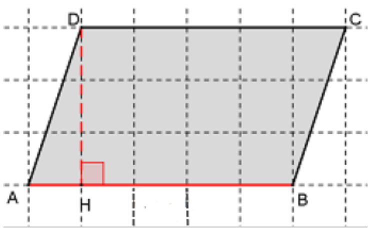
- On trace les droites (VZ) et (WZ) qui portent les diagonales du parallélogramme.
- Avec le compas, on construit le symétrique des sommets V et W par rapport au centre Z.



d. Aire d'un parallélogramme

Propriété 4 : L'aire d'un parallélogramme est donnée par la formule $Aire = base \times hauteur$

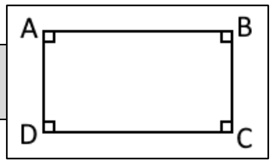
Exemple 6 : Calculer l'aire du parallélogramme $ABCD$.



- $Base : AB = 5$
- $Hauteur : HD = 3$
- $Aire = base \times hauteur = AB \times HD = 5 \times 3 = 15$ u.a.
- L'aire du parallélogramme $ABCD$ est de 15 carreaux.

2 – Parallélogrammes particuliers

a. Le rectangle



Définition 2 : Un **rectangle** est un quadrilatère qui a ses 4 angles droits.

Remarques :

● Un rectangle est un parallélogramme : Ses côtés opposés sont parallèles.

Le rectangle possède donc toutes les propriétés du parallélogramme.

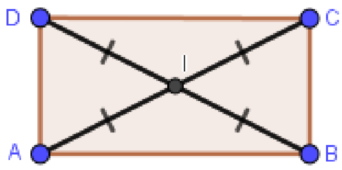
● Pour qu'un quadrilatère soit un rectangle, il suffit qu'il possède 3 angles droits.

● Pour qu'un parallélogramme soit un rectangle, il suffit qu'il possède 1 angle droit.

Propriété 5 : Les diagonales d'un rectangle ont la même longueur et se coupent en leur milieu

Remarque : Réciproquement, si un quadrilatère possède des diagonales de même longueur qui se coupent en leur milieu alors c'est un rectangle.

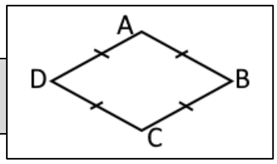
Exemple 7 : $ABCD$ est un rectangle. Vérifier la propriété précédente sur ses diagonales.



● Ses diagonales sont de même longueur : $AC = BD = 4\ cm$

● Elle se coupent en leur milieu : $IA = IB = IC = ID = 2\ cm.$

b. Le losange



Définition 3 : Un **losange** est un quadrilatère qui a ses 4 côtés égaux.

Remarques :

● Un losange est un parallélogramme : Ses côtés opposés sont de même mesure.

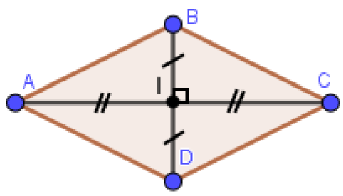
Le losange possède donc toutes les propriétés du parallélogramme.

● Pour qu'un parallélogramme soit un losange, il suffit qu'il ait 2 côtés consécutifs égaux.

Propriété 6 : Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu.

Remarque : Réciproquement, si un quadrilatère possède des diagonales perpendiculaires qui se coupent en leur milieu alors c'est un losange.

Exemple 7 : $ABCD$ est un losange. Vérifier la propriété précédente sur ses diagonales.



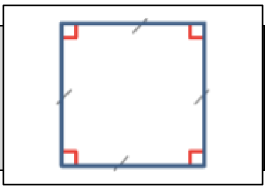
● Ses diagonales sont perpendiculaires.

● Elle se coupent en leur milieu : $IA = IC = 2\ cm$

$IB = ID = 1\ cm$

c. Le carré

<u>Définition 4</u> : Un **carré** est un quadrilatère qui a ses 4 angles droits et ses 4 côtés égaux.



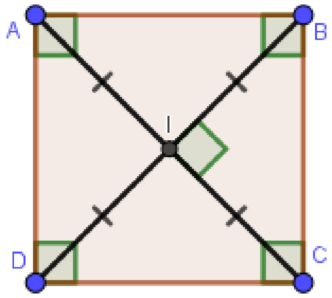
<u>Remarque</u> : Un carré est donc à la fois un rectangle et un losange.

Le carré possède toutes les propriétés du rectangle du losange et du parallélogramme.

<u>Propriété 5</u> : Les diagonales d'un carré ont la même longueur et se coupent perpendiculaire et en leur milieu

<u>Remarque</u> : Réciproquement, si un quadrilatère possède des diagonales de même longueur qui se coupent perpendiculairement en leur milieu alors c'est un carré.

<u>Exemple 7</u> : $ABCD$ est un carré. Vérifier la propriété précédente sur ses diagonales.



- Ses diagonales sont de même longueur : $AC = BD = 5\ cm.$
- Ses diagonales sont perpendiculaires.
- Elle se coupent en leur milieu : $IA = IB = IC = ID = 2.5\ cm.$

3 – Schéma récapitulatif

Voici un schéma récapitulatif sous forme de carte mentale sur les propriétés du parallélogramme et celles des parallélogrammes particuliers :