

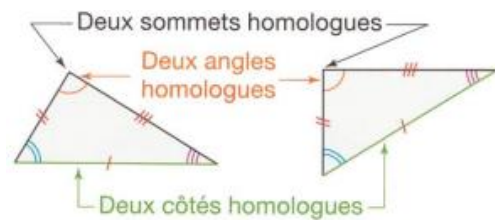
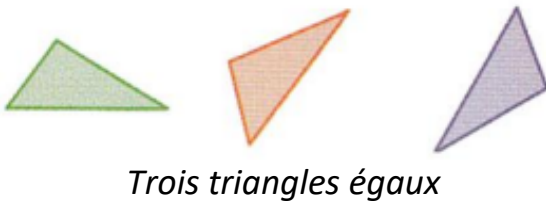
## Chap G3 : Théorème de Thalès

### 1 – Triangles égaux

**Définition 1** : Deux triangles sont dit **égaux** lorsqu'ils sont superposables.

**Remarques** : Deux triangles égaux sont parfaitement identiques, c'est à dire :

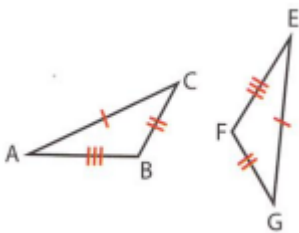
- On peut les faire coïncider par glissement et ou retournement de l'une des figures.
- Ils ont des côtés 2 à 2 de même longueur et des angles 2 à 2 de même mesure.
- Les angles, les sommets et les côtés qui se superposent sont dit **homologues**.



**Propriété 1** : Deux triangles sont égaux s'ils vérifient l'une des conditions suivantes :

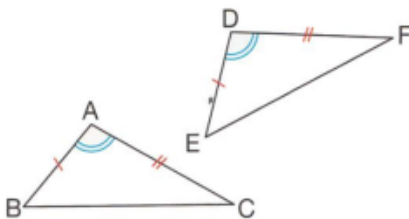
- (1): Leurs trois côtés sont 2 à 2 de même longueur.
- (2): Ils ont un angle de même mesure compris entre deux côtés 2 à 2 de même longueur.
- (3): Ils ont un côté de même longueur compris entre deux angles 2 à 2 de même mesure.

**Exemple 1** : Dans chacun des cas, montrer que les deux triangles sont égaux



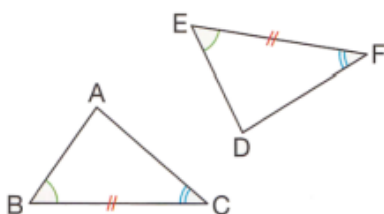
- On a  $AC = EG$ ,  $BC = FG$  et  $AB = EF$

• Les deux triangles  $ABC$  et  $EFG$  ont leur trois côtés de même longueur, donc d'après la propriété (1), on peut affirmer qu'ils sont égaux.



- On a  $\hat{A} = \hat{D}$ ,  $AB = DE$  et  $AC = DF$

• Les deux triangles  $ABC$  et  $EFG$  ont un angle de même mesure compris entre deux côtés de même longueur, donc d'après la propriété (2), on peut affirmer qu'ils sont égaux.



- On a  $BC = EF$ ,  $\hat{B} = \hat{E}$  et  $\hat{C} = \hat{F}$

• Les deux triangles  $ABC$  et  $EFG$  ont un côté de même longueur compris entre deux angles de même mesure, donc d'après la propriété (3), on peut affirmer qu'ils sont égaux.



## 2 – Triangles semblables

**Définition 2** : Deux triangles sont dit **semblables** si on peut les rendre égaux via un agrandissement ou une réduction.



Tous ces triangles sont semblables

**Remarque** : Si deux triangles sont égaux alors ils sont semblables. La réciproque est fautive.

**Propriété 2** : Deux triangles sont semblables si et seulement si les **longueurs** de leurs côtés sont 2 à 2 **proportionnelles**.

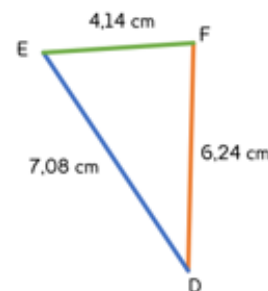
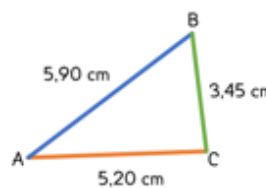
**Remarque** : Le coefficient de proportionnalité  $k$  est appelé **coefficient d'agrandissement** :

- Si  $k > 1$  alors il s'agit d'un **agrandissement**.
- Si  $k < 1$  alors il s'agit d'une **réduction**.
- Si  $k = 1$  alors les deux triangles sont **égaux**.

**Exemple 2** : Les triangles  $ABC$  et  $DEF$  sont-ils semblables ? Si oui, déterminer le coefficient d'agrandissement de  $DEF$  par rapport à  $ABC$ .

<b>Triangle <math>ABC</math></b>	3.45	5.20	5.90
<b>Triangle <math>DEF</math></b>	4.14	6.24	7.08

$\times 1.2$



$$\bullet \frac{EF}{BC} = \frac{4.14}{3.45} = 1.2 \quad \bullet \frac{DF}{AC} = \frac{6.24}{5.20} = 1.2 \quad \bullet \frac{ED}{AB} = \frac{7.08}{5.90} = 1.2$$

- Les longueurs des côtés sont 2 à 2 proportionnelles donc les triangles sont semblables.
- Le coefficient d'agrandissement de  $DEF$  par rapport à  $ABC$  est  $k = 1.2$

**Propriété 3** : Deux triangles sont semblables si et seulement si leurs **angles** sont 2 à 2 de **même mesure**.

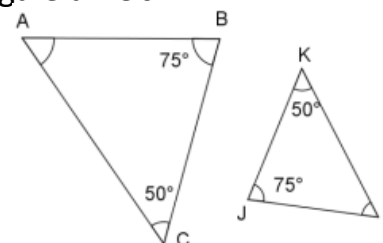
**Rappel** : Dans un triangle la somme des mesures des angles est égale à  $180^\circ$ .

**Exemple 3** : Les triangles  $ABC$  et  $KIJ$  sont-ils semblables ?

$$\text{On a } \hat{B} = \hat{J} = 75^\circ \text{ et } \hat{C} = \hat{K} = 50^\circ$$

$$\text{De plus, } \hat{A} = \hat{I} = 180^\circ - 75^\circ - 50^\circ = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ.$$

Les angles sont 2 à 2 de même mesure donc les triangles  $ABC$  et  $KIJ$  sont semblables.

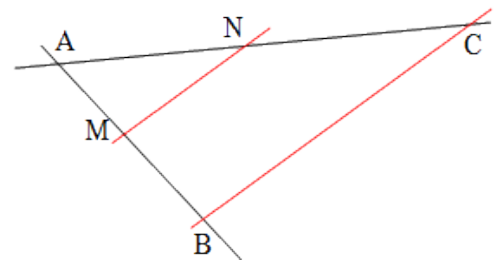


### 3 – Théorème de Thalès

**Propriété 3 (Théorème de Thalès) :** Soit  $ABC$  un triangle.

Si  $M$  est un point de  $(AB)$  et  $N$  un point de  $(AC)$   
tel que les droites  $(MN)$  et  $(BC)$  soient parallèles

alors on a l'égalité :  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ .



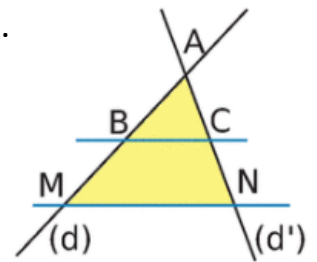
**Remarque :** Le théorème de Thalès nous dit que si les droites  $(MN)$  et  $(BC)$  sont parallèles alors les triangles  $AMN$  et  $ABC$  sont semblables. Le résultat de l'égalité correspond alors au coefficient d'agrandissement  $k$  du triangle  $AMN$  par rapport à  $ABC$ .

**Exemple 4 :** Sur la figure ci-contre, les droites  $(MN)$  et  $(BC)$  sont parallèles.

On sait que  $AB = 3 \text{ cm}$ ,  $AN = 4 \text{ cm}$  ;  $AM = 7 \text{ cm}$  et  $BC = 2.5$

1) Que peut-on dire des triangles  $AMN$  et  $ABC$  ?

On a  $(MN) \parallel (BC)$ , donc les triangles  $AMN$  et  $ABC$  sont semblables :



Les longueurs de leurs côtés sont 2 à 2 proportionnelles.

<b>Triangle <math>ABC</math></b>	3	$AC$	2.5
<b>Triangle <math>AMN</math></b>	7	4	$MN$

Le coefficient d'agrandissement de  $AMN$  par rapport à  $ABC$  est  $k = \frac{7}{3} \approx 2.3$

2) Calculer la longueur  $AC$ .

Comme les droites  $(MN)$  et  $(BC)$  sont parallèles d'après le théorème de Thalès on a :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \text{ d'où } \frac{7}{3} = \frac{4}{AC}. \text{ Produit en croix : } 7 \times AC = 3 \times 4. AC = \frac{3 \times 4}{7} = \frac{12}{7} \approx 1.7 \text{ cm.}$$

3) Calculer la longueur  $MN$ .

$$\text{De même, on a l'égalité } \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \text{ d'où } \frac{7}{3} = \frac{MN}{2.5}.$$

$$\text{Produit en croix : } 7 \times 2.5 = 3 \times MN. MN = \frac{7 \times 2.5}{3} = \frac{17.5}{3} \approx 5.8 \text{ cm.}$$

**Exemple 5 :** Sur la figure ci-dessous,  $TR = 11 \text{ cm}$ ,  $TS = 8 \text{ cm}$ ,  $TM = 15 \text{ cm}$  et  $TE = 10 \text{ cm}$ .

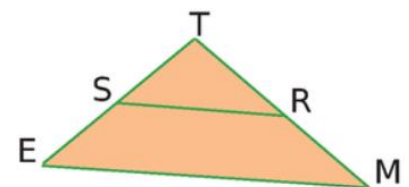
Montrer que les droites  $(RS)$  et  $(ME)$  ne sont pas parallèles.

Si les droites  $(RS)$  et  $(ME)$  étaient parallèles, alors d'après

le théorème de Thalès on aurait l'égalité :  $\frac{TS}{TE} = \frac{TR}{TM} = \frac{RS}{EM}$ .

Or,  $\frac{TS}{TE} = \frac{8}{10} = 0.8$  et  $\frac{TR}{TM} = \frac{11}{15} \approx 0.73 \neq 0.8$  donc ce n'est pas le cas.

Les droites  $(RS)$  et  $(ME)$  ne sont donc pas parallèles.



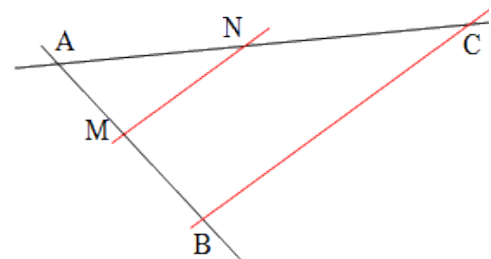
## 4 – Réciproque du théorème de Thalès

**Propriété 4 (Réciproque de Thalès) :** Soit  $ABC$  un triangle.

Si  $M$  est un point de  $(AB)$  et  $N$  un point de  $(AC)$

tel que l'on ait l'égalité :  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$  alors les droites

$(MN)$  et  $(BC)$  sont parallèles



**Remarques :**

- La réciproque du théorème de Thalès nous dit que si les triangles  $AMN$  et  $ABC$  sont semblables alors les droites  $(MN)$  et  $(BC)$  sont parallèles.

- Si on a l'égalité  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$  alors on aura aussi l'égalité avec le troisième rapport  $\frac{MN}{BC}$ .

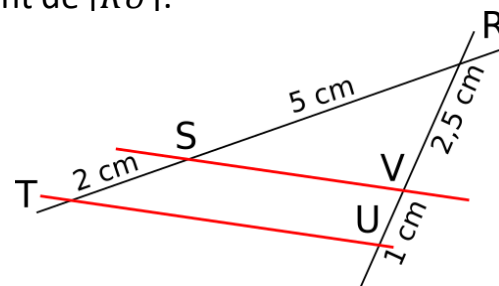
**Exemple 6 :** Sur la figure ci-contre, les droites  $(SV)$  et  $(TU)$  sont-elles parallèles ?

Dans le triangle  $RTU$ ,  $S$  est un point de  $[RT]$  et  $V$  est un point de  $[RU]$ .

$RT = 5 + 2 = 7 \text{ cm}$  et  $RU = 1 + 2.5 = 3.5 \text{ cm}$

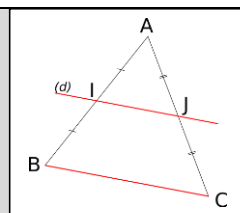
$\frac{RS}{RT} = \frac{5}{7}$  et  $\frac{RV}{RU} = \frac{2.5}{3.5} = \frac{2.5 \times 2}{3.5 \times 2} = \frac{5}{7}$ . On a donc l'égalité  $\frac{RS}{RT} = \frac{RV}{RU}$ .

D'après la réciproque du théorème de Thalès,  
les droites  $(SV)$  et  $(TU)$  sont parallèles.



**Propriété 5 (Théorème de la droite des milieux) :** Soit  $ABC$  un triangle.

Si  $I$  est le milieu de  $[AB]$  et  $J$  est le milieu de  $[AC]$  alors les droites  $(IJ)$  et  $(BC)$  sont parallèles et la longueur  $IJ$  est la moitié de celle de  $BC$ .



**Remarque :** C'est une conséquence de la réciproque du théorème de Thalès. En effet :

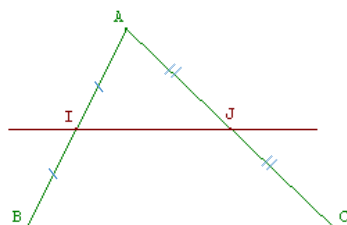
- Si  $I$  est le milieu de  $[AB]$  et  $J$  est le milieu de  $[AC]$  alors  $\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC} = \frac{1}{2}$ .

- Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès les droites  $(IJ)$  et  $(BC)$  sont parallèles.

- On aura de plus l'égalité  $\frac{IJ}{BC} = \frac{1}{2}$  c'est-à-dire  $IJ = \frac{1}{2} \times BC$  ou encore  $BC = 2 \times IJ$ .

**Exemple 7 :** Tracer un triangle  $ABC$ , puis placer les milieux  $I$  et  $J$  des côtés  $[AB]$  et  $[AC]$ .

Tracer ensuite la droite  $(IJ)$  puis vérifier le théorème de la droite des milieux.



Les droites  $(IJ)$  et  $(BC)$  sont parallèles.

On a  $IJ = 2 \text{ cm}$  et  $BC = 4 \text{ cm}$

On a donc bien  $IJ = 0.5 \times BC$

