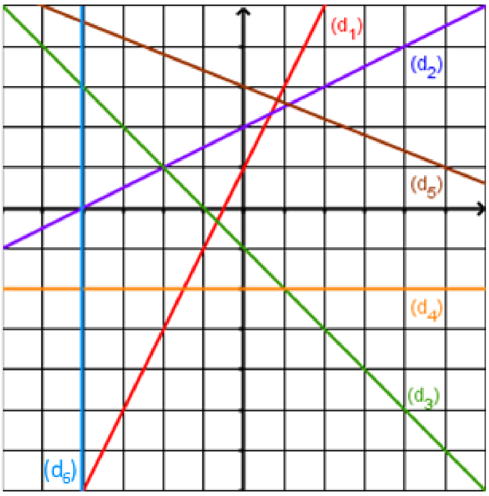
Chapitre 5 : Dérivation

Activité 1 (Pente d'une droite) : Déterminer la pente des droites (d_1) à (d_6) ci-dessous.



Activité 2 (Pente d'une courbe) : Dans cette activité nous allons étudier la pente de la fonction carré.

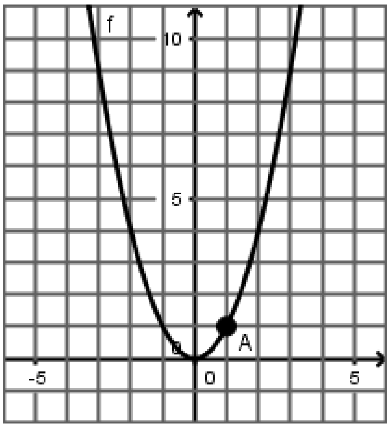


Figure 1 : Fonction carré

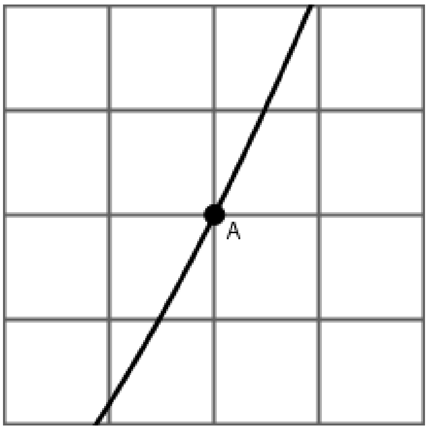


Figure 2 : Zoom (x 20)

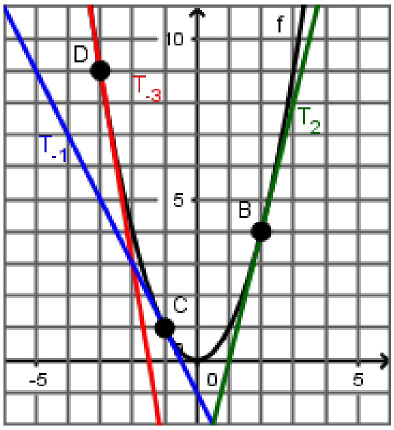


Figure 3 : T_2, T_{-3} et T_{-1}

1) On a tracé en *Figure 1* la fonction carré $f(x) = x^2$. Que peut-on dire de la pente de la courbe ?

2) On s'intéresse à la pente de la courbe en la valeur $x = 1$. On a effectué en *Figure 2*, un zoom de la courbe au niveau du point A. A quoi peut-on assimiler la courbe « au voisinage » du point A ?

3) Nous allons donc essayer d'approximer la courbe à l'aide d'une droite au niveau du point A

   Sur les *Figures 1 et 2*, tracer la droite (d) d'équation $y = 2x - 1$. Que dire de cette droite ?

   *Cette droite est appelée la **tangeante à la courbe de f en 1.** Elle est noté T_1.*

   C'est la droite qui passe au plus près de la courbe autour du point d'absicisse 1.

4) En déduire la pente de la courbe de la fonction carré en 1 ?

   La pente de la courbe est donnée par le coefficient directeur de la tangente T_1 à la courbe.

   *Ce nombre est appelé **nombre dérivée de f en 1** et est noté $f'(1)$.*

5) Sur la *Figure 3* on a tracé les tangeantes T_2, T_{-3} et T_{-1} à la courbe de la fonction carré en 2, -3 et -1.

   En déduire les nombres dérivées $f'(2)$, $f'(-3)$ et $f'(-1)$.

6) Quelle est la valeur de $f'(0)$?

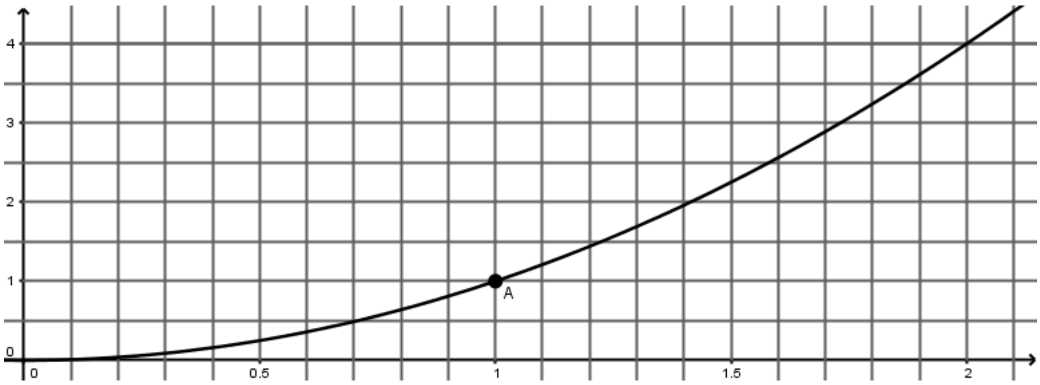
1 – Nombre dérivée

On considère une fonction f définie sur un intervalle I et un nombre réel a de I.

Définition 1 : On appelle **taux d'accroissement** de f en a avec un pas de $h > 0$, le nombre réel

$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Exemple 1 : Soit f la fonction carré dont on a tracé ci-dessous une partie de sa courbe représentative.



1) Déterminer graphiquement le taux d'accroissement de la fonction carré en $a = 1$, pour un pas de :
   - $h = 1$
   - $h = 0.5$
   - $h = 0.1$
2) Vérifier par le calcul les résultats précédents.
3) Montrer que pour un pas $h > 0$ quelconque, le taux de la fonction carré est donnée par $\tau_1(h) = 2 + h$.
4) Compléter alors le tableau suivant :

h	1	0.5	0.2	0.1	0.01	0.001
$\tau_1(h)$						

Exemple 2 : Soit f la fonction racine carré

1) Exprimer en fonction de h le taux d'accroissement de la fonction racine carré en 0.
2) Compléter alors le tableau suivant :

h	1	0.5	0.2	0.1	0.01	0.001
$\tau_0(h)$						

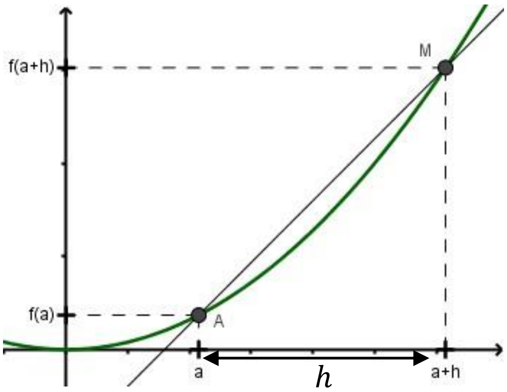
Définition 2 : On dit que f est **dérivable** en a, lorsque le taux d'accroissement $\tau_a(h)$ tend vers un nombre réel lorsque h tend vers 0. Ce nombre est appelé **nombre dérivée de** f en a et est noté $f'(a)$.

On écrit alors $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Exemple 1 (Suite) : Lorsque h se rapproche de 0, le taux d'accroissement $\tau_1(h)$ de la fonction carré en 1 se rapproche de 2. Cela s'écrit $\lim\limits_{h \to 0} \tau_1(h) = 2$. La fonction carré est donc dérivable en 1, et on a $f'(1) = 2$.

Exemple 2 (Suite): Lorsque h se rapproche de 0, le taux d'accroissement $\tau_0(h)$ de la fonction racine carré « explose ». Cela s'écrit $\lim\limits_{h \to 0} \tau_0(h) = +\infty$. La fonction racine carré n'est donc pas dérivable en 0.

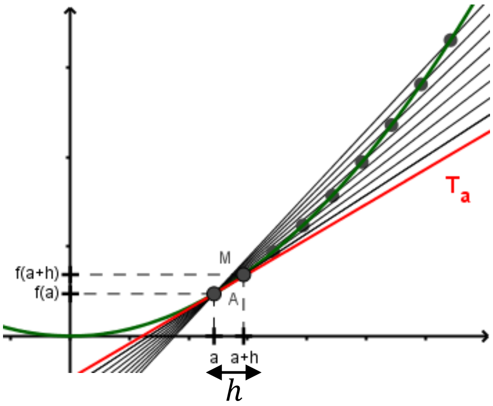
Interprétation graphique :



- On note A le point de la courbe de f d'abscisse a.
- Pour un pas $h > 0$ donné, on considère le point M de la courbe de f d'abscisse $a + h$.
- On peut donc considérer la droite (AM)
- Calculons le coefficient directeur de cette droite :

$$\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Propriété 1 : Le taux d'accroissement $\tau_a(h)$ correspond au coefficient directeur de la droite (AM).



➢ Que se passe-t-il lorsque h se rapproche de 0 ?

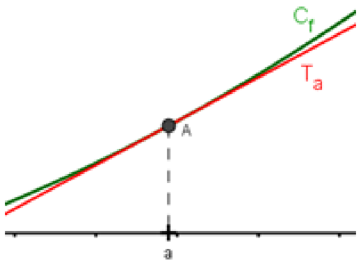
- Le point M se rapproche de A, et la droite (AM) se rapproche d'une « position limite » appelée tangente à la courbe de f en a.
- La pente de la droite (AM) se rapproche donc d'une certaine « valeur limite » qui correspond à la pente de cette tangente.
- Ainsi $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \tau_a(h) = \lim\limits_{M \to A} Pente\ de\ (AM) = Pente\ de\ T_a$

2 – Nombre dérivée et tangente

Définition 3 : On appelle **tangente à la courbe de f en** a et on note T_a la position limite de la droite (AM) lorsque M se rapproche de A.

Interprétation graphique :

- La tangente T_a est la droite qui passe au plus près de la courbe de f autour de a.
- Elle « frôle » la courbe et la « touche » au point A.



Propriété 2 : Lorsque f est **dérivable** en a, $f'(a)$ coïncide avec le coefficient directeur de la tangente T_a.

Remarque : Lorsque la tangente T_a est tracé, on peut lire graphiquement le nombre dérivée $f'(a)$

Propriété 3 : Lorsque f est **dérivable** en a, la tangente T_a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Exemple 3 : La tangente T_1 à la courbe de la fonction carré a pour équation

$T_1 : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$. Or $f'(1) = 2$ et $f(1) = 1^2 = 1$

On a donc $T_1 : y = 2(x - 1) + 1$ c'est-à-dire $T_1 : y = 2x - 1$

T_1 a pour coefficient directeur 2.

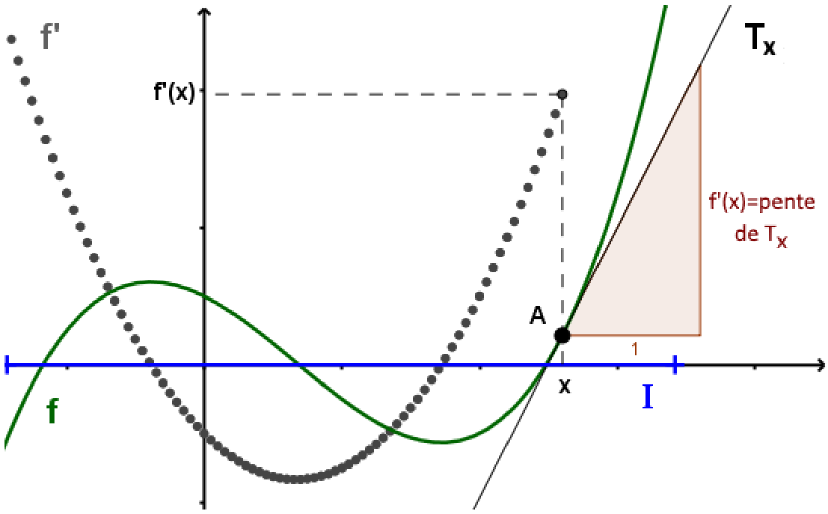
3 – Fonction dérivée

a. Dérivée d'une fonction f

Définition 4 : On dit que f est dérivable sur l'intervalle I, si f est dérivable en tout nombre a de I.

Définition 5 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On appelle **fonction dérivée** de f, la fonction noté f' définie sur I, qui à chaque nombre x de I, associe le nombre dérivée $f'(x)$

Interprétation graphique : La dérivée f' est la fonction qui associe, à chaque x de I, la pente de la courbe de f en x, c'est-à-dire le coefficient de la tangente T à la courbe de f en x.



b. Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	**Fonction dérivée f'**	**Intervalle de dérivabilité**
$f(x) = c$ (constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ (avec n entier, $n \geq 2$)	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (ou $\mathbb{R}^*$)
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

Remarque :

- La fonction inverse n'est pas dérivable en 0, car elle n'est pas définie en ce nombre.
- La fonction racine carré n'est pas dérivable en 0, la tangente T_0 à sa courbe en 0 est verticale, et ne possède donc pas de coefficient directeur.

3 – Dérivées et Opérations

a. Addition, Multiplication par un nombre

Propriété 3 : On considère u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un nombre réel.

• Si $f = u + v$ alors f est dérivable sur I et on a $f' = u' + v'$

• Si $f = k \times u$ alors f est dérivable sur I et on a $f' = k \times u'$.

Remarque : Si $f = u - v$ alors $f = u + (-1) \times v$ et on a donc $f' = u' + (-1) \times v' = u' - v'$.

Exemple 4 : Dériver les fonctions suivantes :

• $f(x) = \underbrace{x^2}_{u} + \underbrace{\sqrt{x}}_{v}$. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a $f' = u' + v'$ c'est à dire $f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

• $g(x) = \underbrace{3}_{k}\ \underbrace{x^{10}}_{u}$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $g' = k \times u'$ c'est à dire $g'(x) = 3 \times 10x^9 = 30x^9$.

• $h(x) = \underbrace{\frac{1}{x}}_{u} - \underbrace{x^3}_{v}$ h est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et on a $h' = u' - v'$ c'est à dire $h'(x) = -\frac{1}{x^2} - 3x^2$.

Exemple 5 : Dériver les polynômes suivants :

• $f(x) = 3x^3 - x^2 + 5x + 1$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3 \times 3x^2 - 2x + 5 \times 1 + 0 = 9x^2 - 2x + 5$.

•$g(x) = \frac{1}{2}x^{10} - \frac{2}{3}x^6 - x$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = \frac{1}{2} \times 10x^9 - \frac{2}{3} \times 6x^5 - 1 = 5x^9 - 4x^5 - 1$.

b. Dérivée d'un produit

Propriété 4 : On considère u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Si $f = u \times v$ alors f est dérivable sur I et on a $f' = u'v + v'u$

Exemple 6 : Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$

On a $f = u \times v$ avec $\begin{cases} u = x \\ u' = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} v = \sqrt{x} \\ v' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a $f' = u'v + v'u$.

On obtient $f'(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \times x = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{2 \times \sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

Corollaire 2 : Si $f = u^2$ alors f est dérivable sur I et on a $f' = 2u'u$

Démonstration : On a $f = u^2 = u \times u$. Ainsi, d'après la propriété précédente on a $f' = u'u + u'u = 2u'u$.

Exemple 7 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x + 5)^2$

On a $f = u^2$ avec $\begin{cases} u = 3x + 5 \\ u' = 2 \end{cases}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f' = 2u'u$.

On obtient $f'(x) = 2 \times 3 \times (3x + 5) = 6(3x + 5) = 18x + 30$.

c. Dérivée d'un quotient

<u>Propriété 5</u> : On considère u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I avec $v(x) \neq 0$ sur I.

Si $f = \frac{u}{v}$ alors f est dérivable sur I et on a $f' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$

<u>Exemple 8</u> : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$

On a $f = \frac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u = 3x \\ u' = 3 \end{cases}$ et $\begin{cases} v = x^2+1 \\ v' = 2x \end{cases}$. $x^2+1 \neq 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$.

On obtient $f'(x) = \frac{3\times(x^2+1)-2x\times 3}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^2-6x+3}{(x^2+1)^2}$

<u>Corollaire 3</u> : Si $f = \frac{1}{v}$ alors f est dérivable sur I et on a $f' = -\frac{v'}{v^2}$

<u>Démonstration</u> : On a $f = \frac{u}{v}$ avec $u = 1$. On a donc $u' = 0$. Ainsi, on a $f' = \frac{0\times v-v'\times 1}{v^2} = -\frac{v'}{v^2}$

<u>Exemple 9</u> : Soit f la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{4-2x}$

On a $f = \frac{1}{v}$ avec $\begin{cases} v = 4-2x \\ v' = -2 \end{cases}$. $4-2x \neq 0$ sur $]2;+\infty[$ donc f est dérivable sur $]2;+\infty[$ et on a $f' = \frac{-v'}{v^2}$.

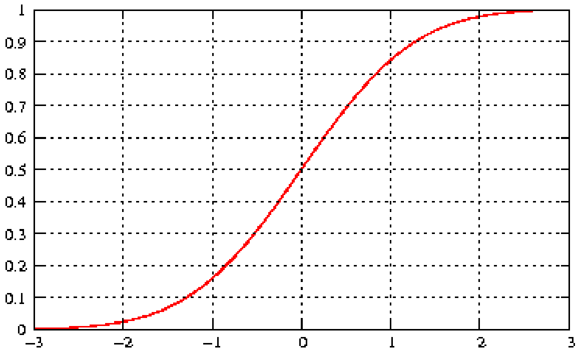
On obtient $f'(x) = -\frac{-2}{(4-2x)^2} = \frac{2}{(4-2x)^2}$.

Dérivation – Exercices

Taux d'accroissement

1 (Taux d'accroissement d'une courbe)

Soit f la fonction définie par la courbe ci-dessous.



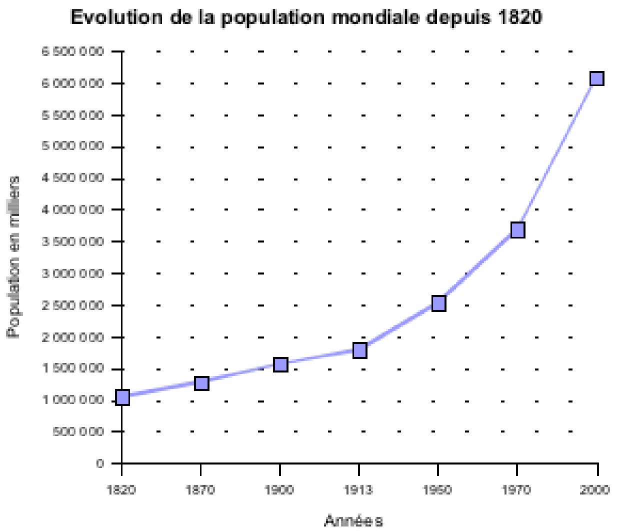
1) Déterminer le taux d'accroissement de la fonction f entre -3 et -1 puis entre -1 et 1.
2) Interpréter graphiquement ces résultats

2 (Taux d'accroissement d'une fonction)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2$.

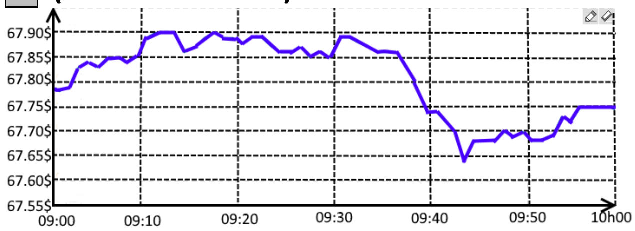
1) Calculer $f(1)$ et $f(1+h)$.
2) Déterminer le taux d'accroissement de la fonction f entre 1 et $1+h$, pour $h \neq 0$
3) Donner la valeur de ce taux d'acroissement pour $h = 0.5$ et $h = 0.1$

3 (Taux d'accroissement de la population)



4) A partir de la courbe ci-dessous, déterminer le taux d'accroissement de la population mondiale :
   a. Entre 1820 et 1900.
   b. Entre 1900 et 1950.
   c. Entre 1970 et 2000.
5) Que peut-on en conclure sur l'évolution de la population mondiale entre 1820 et 2000 ?

4 (Cours du Pétrole)



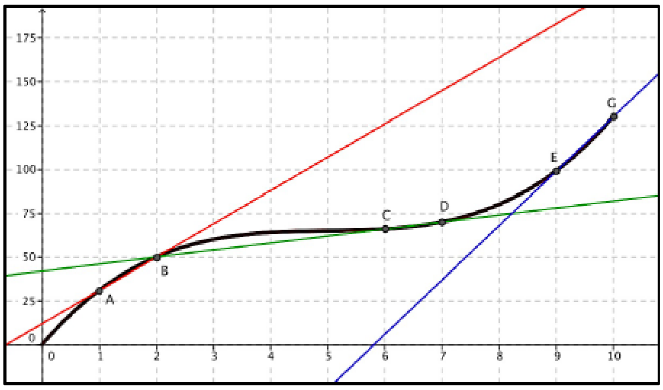
Cours du baril de pétrole le 04/01/2018

1) A partir de la courbe ci-dessous, déterminer le taux d'accroissement du cours du baril :
   a. Entre $9{:}00$ et $9{:}20$.
   b. Entre $9{:}30$ et $9{:}40$.
   c. Entre $9{:}50$ et $10{:}00$.
2) Proposer une interprétation de ces résultats en terme de stratégie boursière.

5 (Coût marginal)

On considère C une fonction coût où $C(q)$ représente le coût total pour q unités produites. On appelle cout marginal et on note $C_m(q)$ le coût induit par la production d'une unité supplémentaire à partir de q unités déjà produites.

1) a. Donner une expression de $C_m(q)$ en utilisant la fonction C.
   b. En déduire que l'on peut voir $C_m(q)$ comme un taux d'accroissement de C.
2) On a tracé ci-dessous, la courbe représentative d'une fonction coût C.



   a. En utilisant un argument graphique, ranger dans l'ordre croissant les coûts marginaux :
   $$C_m(1)\ ,\ C_m(6) \text{ et } C_m(9)$$
   b. Estimer graphiquement la valeur de $C(9)$ puis celle de $C_m(9)$.
3) On considère maintenant la fonction coût définie par l'expression suivante :
   $$C(q) = q^2 + 2q + 15$$
   a. Calculer la valeur de $C(10)$ et de $C_m(10)$, puis donner une interprétation économique de ces résultats.
   b. Exprimer $C_m(q)$ en fonction de q.

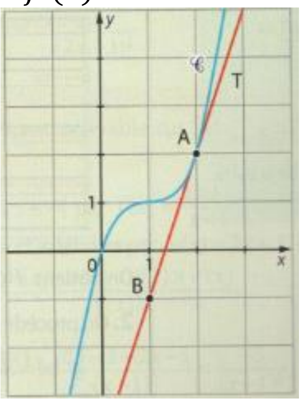
Nombre dérivée

6 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.

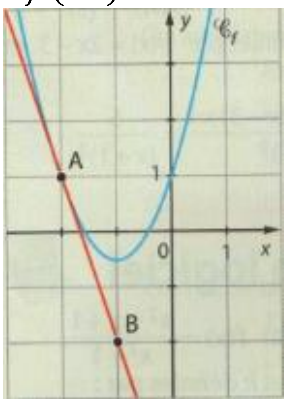
1) Calculer le taux d'accroissement de la fonction f entre -2 et $-2 + h$, pour $h \neq 0$
2) Que se passe-t-il lorsque h se rapproche de 0 ?
3) En déduire que f est dérivable en -2 et déterminer la valeur de $f'(-2)$.

7 Pour chacune des fonctions suivantes, la droite T est la tangente à la courbe de f au niveau du point A. Déterminer graphiquement les nombres dérivées suivants :

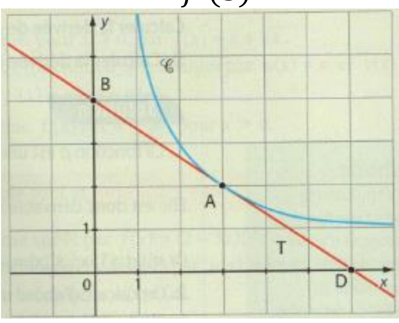
- $f'(2)$



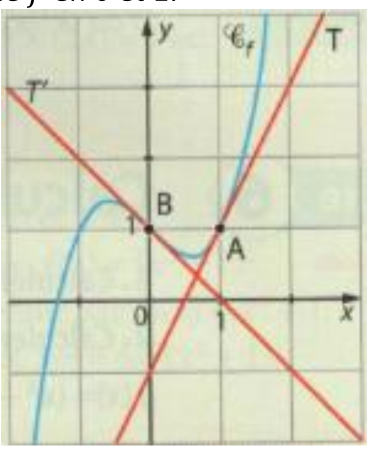
- $f'(-2)$



- $f'(3)$

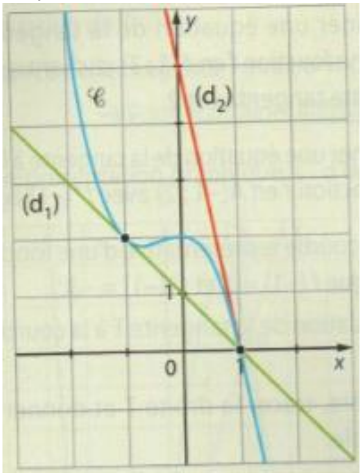


8 On a tracé ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f ainsi que les tangeantes T et T' à la courbe de f en 0 et 1.



Déterminer graphiquement les nombre dérivées de f en 0 et 1.

9 Les droites (d_1) et (d_2) sont tangente à la courbe $\mathcal{C}$ aux points d'abscisse -1 et 1.

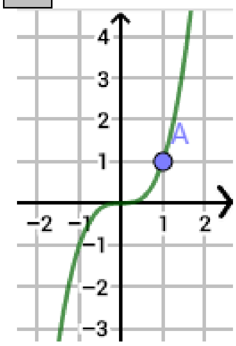


1) Déterminer graphiquement $f(1)$, $f(-1)$, $f'(1)$ et $f'(-1)$
2) Donner une équation des droites (d_1) et (d_1).

10 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On sait que sa courbe représentative passe par les points $A(-1; -2)$, $B(-2; -1)$ et $C(0; -1)$. On sait de plus que $f'(-1) = 0$, $f'(-2) = -3$ et $f'(0) = 2$.

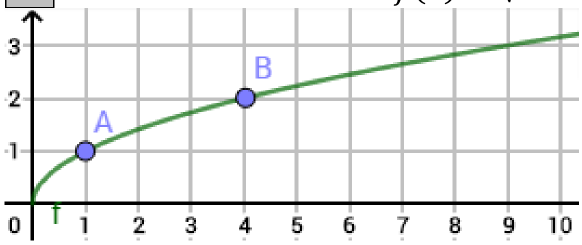
1) Placer les points A, B et C, puis tracer les tangentes à la courbe de f en ces points.
2) Dessiner une courbe vérifiant toutes ces conditions.

11 On considère la fonction cube $f(x) = x^3$



1) Calculer $f'(1)$
2) Déterminer une équation de la tangente T_1 à la courbe de f en 1.
3) Tracer cette tangente.

12 On considère la fonction $f(x) = \sqrt{x}$



1) Tracer les tangentes T_1 et T_4 à la courbe de f.
2) Que dire de la tangente T_0 ?

13 Dans un même repère tracer la courbe représentative de la fonction carré ainsi que quelques-unes de ces tangentes

Fonction dérivée

14 Comparer les nombres dérivées des fonctions suivantes en $x = 1$ puis interpréter ces résultats graphiquement.

a. $f(x) = x^2$
b. $g(x) = x^3$
c. $h(x) = \frac{1}{x}$
d. $k(x) = \sqrt{x}$

15 On considère la fonction $f(x) = x^5$. Calculer mentalement le nombre dérivée de f en

a. $x = 10$
b. $x = -1$
c. $x = \frac{1}{2}$
d. $x = \sqrt{2}$

16 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 5x^3$
2) $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$
3) $h(x) = \frac{800}{x}$
4) $k(x) = \frac{x}{4}$

17 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x^2 + x$
2) $g(x) = x^3 - x$
3) $h(x) = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$
4) $k(x) = -x^{10} + 3x$

18 On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = x^2 + 5x$.

1) Calculer $f'(x)$.
2) En déduire $f'(1)$ et $f'(3)$.

19 Calculer la dérivée des polynômes suivants :

1) $f(x) = 2x^2 - 10x - 8$
2) $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 9$
3) $h(x) = -5x^3 + 2x^2 - 4$
4) $k(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$
5) $p(x) = 0.01x^3 + 0.25x^2 - 0.3x + 10$
6) $q(x) = 5x^{25} + 25x^5 - 30x^2 + 60$

20 On considère la fonction $f(x) = \frac{2x-7}{3-x}$ définie sur $]3; +\infty[$

1) On pose $u(x) = 2x - 7$ et $v(x) = 3 - x$
   Calculer $u'(x)$ et $v'(x)$
2) Quelle est la forme de la fonction ?
3) Calculer la dérivée $f'(x)$

21 Dériver de deux façons différentes la fonction

$$f(x) = (5x + 3)(1 - 2x)$$

1) En utilisant la formule pour dériver un produit.
2) En commençant par développer le double produit.

22 On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{3x+5}$ définie sur $]-\frac{5}{3}\ ; +\infty[$

1) Quelle est la forme de f
2) Calculer la dérivée f' de f.
3) En déduire $f'(0)$ et $f'(1)$

23 Dériver les fonctions suivantes après avoir préciser l'intervalle de dérivabilité.

1) $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$
2) $g(x) = \frac{3x-2}{1-x}$
3) $h(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$
4) $k(x) = \frac{1}{4x-2}$

24 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer la forme de la fonction f, puis calculer la dérivée f' de f, en précisant l'intervalle de dérivabilité.

1) $f(x) = -7x^2$
2) $f(x) = 0.1\,x^{10}$
3) $f(t) = 2t^2 - 3t + 7$
4) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$
5) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$
6) $f(x) = -x^2 + x + \frac{1}{x}$
7) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$
8) $f(x) = 2\sqrt{x} - x$
9) $f(x) = x\sqrt{x}$
10) $f(t) = 0.03t^3 + 9$
11) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$
12) $f(x) = x + 20 + \frac{800}{x}$
13) $f(x) = (5 - x)(2x + 3)$
14) $f(x) = (4x - 3)^2$
15) $f(x) = 2x^8 - 4x^4 + 8x^2 - 16x$
16) $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 0{,}5$
17) $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$
18) $f(x) = \frac{-2t}{t+1}$
19) $f(x) = \frac{1}{5}x^{10} + \frac{1}{3}x^6 + 0.25x^4 + 10$
20) $f(x) = \frac{-1}{x+5}$

Problèmes

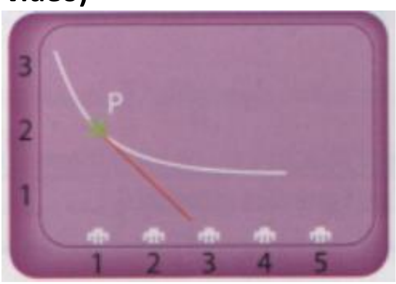
25 **(Coût marginal)**

Une usine de produits chimiques produit du détergent. Le prix de vente d'une tonne de détergent est de 80 €. Les coûts de production (en euros) d'une quantité q (en tonnes) de détergent sont modélisés par la fonction C définie par :

$$C(q) = 0.03q^2 + 50q + 2000.$$

1) Calculer les coûts de production de $55, 56, 57, 58$ tonnes de détergent.
2) Le **coût marginal** $C_M(q)$ est le coût de production d'une tonne supplémentaire produite à partir de q tonnes déjà produites.
   a. Calculer $C_M(55)$, $C_M(56)$ et $C_M(57)$
   b. Exprimer en fonction de q le coût marginal de production $C_M(q)$.
3) Nous allons voir une façon d'approximer le coût marginal de production
   a. Calculer la dérivée C' de la fonction C.
   b. Calculer $C'(55)$, $C'(56)$, $C'(57)$.
   c. Quel erreur commet-on en approximant le coût marginal $C_M(q)$ par la dérivée C'
4) L'entreprise décide de produire tant que le coût marginal de production reste inférieur au prix de vente unitaire d'une tonne de détergent. Quel est le niveau de production de l'entreprise ?
5) Cette stratégie de production est-elle payante pour l'entreprise en terme de bénéfice ?

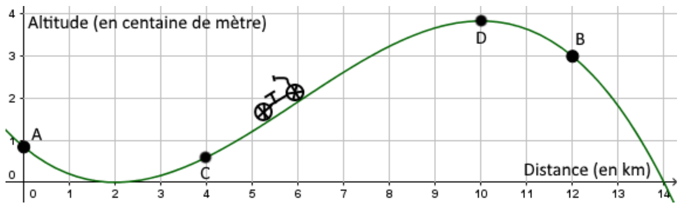
26 **(Jeu vidéo)**



Dans un jeu vidéo, des avions qui descendent de gauche à droite selon la trajectoire $y = 1 + \frac{1}{x}$ et tirent des balles selon la tangente à leur trajectoire en direction d'une cible située sur l'axe des abscisses. L'avion tire du point $A(1; 2)$. Touchera-t-il la cible située au point $B(3; 0)$?

27 **(Pente topographique)**

Un course de cyclisme est organisée sur une montagne.



On a modélisé la silhouette de la montagne par la courbe de la fonction f définie sur $[0; 14]$ par :

$$f(x) = -0.015x^3 + 0.27x^2 - 0.9x + 0.84$$

Le départ de la course est symbolisée par le point A et l'arrivée de la course par le point B. Dans ce problème nous allons étudier la **pente topographique** du parcours de la course.

1) a. A quelle altitude se trouve le départ de la course ?
   b. Quelle est l'altitude maximale du parcours ?
   c. Réaliser le tableau de variation du parcours.
2) Montrer que la dérivée de f est :
   $f'(x) = -0.045x^2 + 0.54x - 0.9$
3) a. Calculer $f'(4)$, $f'(10)$
   b. En déduire la pente topographique (en %) du parcours au niveau des points C et D.
   c. Quelle la pente topographique (en %) au niveau du point de départ ?
4) Etude de la fonction f'
   a. Réaliser le tableau de variation de la fonction f'
   b. Réaliser le tableau de signe de la fonction f'
5) a. En quel point la pente topographique est-elle maximale ?
   b. Sur quel intervalle la pente topographique est-elle positive ?
   c. Existe-t-il un point du parcours où la pente topographique dépasse -10% ?
6) Comparer le tableau de variation du parcours avec le tableau de signe de la dérivée