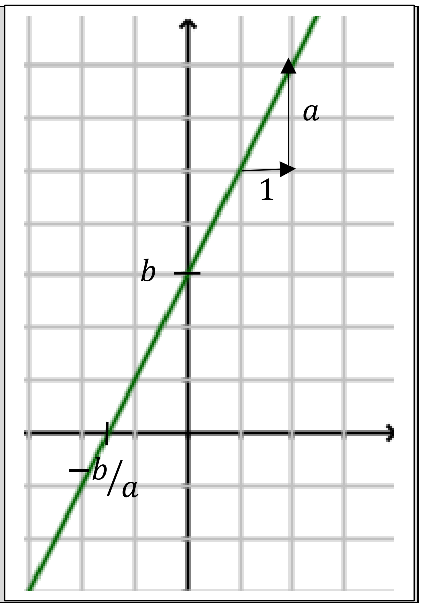
Chapitre 6 : Dérivation & Etude de fonctions

1 – Polynôme du premier degré (Fonction affine)

Rappel :

- On appelle **fonction affine** tout fonction de la forme $f(x) = ax + b$.
- La représentation graphique d'une fonction affine est une **droite** d'équation $y = ax + b$
- a est appelé le **coefficient directeur** et b **l'ordonnée à l'origine**
- Si $a > 0$ alors f est **croissante**. Si $a < 0$ alors f est **décroissante.**
- Le **signe** d'une fonction affine est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-{}^{b}/_{a}$		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de $-a$	

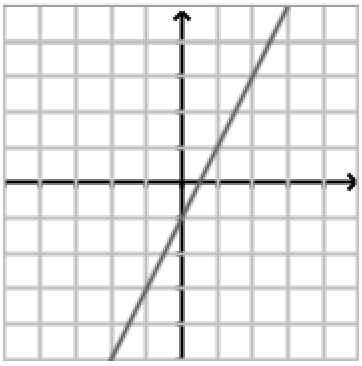


Exemple 1 : Etudier les deux fonctions affines suivantes

- $f(x) = 2x - 1$

Coefficient directeur : $a = 2$
Ordonnée à l'origine : $b = -1$

Représentation graphique :



Sens de variation :
$a > 0$ donc f est croissante

Signe :

x	$-\infty$		0.5		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

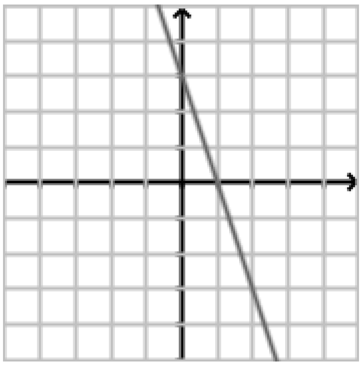
$$-\frac{b}{a} = -\frac{-1}{2} = 0.5$$

Croissant donc d'abord **négatif** puis **positif**

- $g(x) = -3x + 3$

Coefficient directeur : $a = -3$
Ordonnée à l'origine : $b = 3$

Représentation graphique :



Sens de variation :
$a < 0$ donc g est décroissante

Signe :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

$$-\frac{b}{a} = -\frac{3}{-3} = 1$$

Décroissant donc d'abord **positif** puis **négatif**

2 – Polynôme du second degré

Définition 1 : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du **second degré**. On appelle **fonction dérivée** de f, la fonction $f'(x) = 2ax + b$.

Exemple 2 : On considère le polynôme du second degré $f(x) = 5x^2 + 3x - 2$. Calculons la dérivée f' de f.

$f(x) = 5x^{2} + 3\cancel{x} - \cancel{2}$ donc $f'(x) = 2\times 5x + 3$ donc $f'(x) = 10x + 3$.

Théorème 1 : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré et I un intervalle. Alors :

• Si pour tout x de I, $f'(x) > 0$ alors f est **croissante** sur I.

• Si pour tout x de I, $f'(x) < 0$ alors f est **décroissante** sur I.

Remarque : Ce théorème permet d'obtenir le tableau de variation d'un polynôme du second degré.

Exemple 3 : Déterminer le tableau de variation des polynômes du second degré suivant :

1) $f(x) = x^2 - 4x + 5$

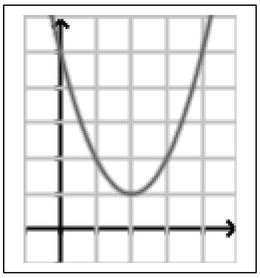
On commence par calculer la dérivée f' : $f'(x) = 2x - 4$

La dérivée est une fonction affine dont le coefficient directeur est égal à 2 donc positif.

La fonction f' est donc croissante donc d'abord négative puis positive.

Elle s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{-4}{2} = 2$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	



$f(2) = 2^2 - 4\times 2 + 5 = 4 - 8 + 5 = 1$

2) $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$

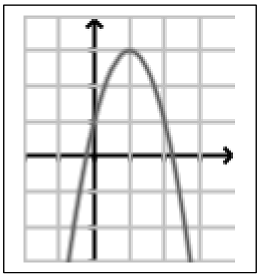
On commence par calculer la dérivée f' : $f'(x) = 2\times(-2)x + 4 = -4x + 4$

La dérivée est une fonction affine dont le coefficient directeur est égal à -4 donc négatif.

La fonction f' est donc décroissante donc d'abord positive puis négative.

Elle s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{-4}{-4} = 1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	3	$\searrow$	



$f(1) = -2\times 1^2 + 4\times(1) + 1 = -2 + 4 + 1 = 3$

3 – Polynôme du troisième degré

Définition 2 : Soit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polynôme du **troisième degré**. On appelle **fonction dérivée** de f, la fonction $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Exemple 4 : Calculer la dérivée f' du polynôme du troisième degré $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 5x - 1$.

$f(x) = 2x^{3\,2} + 4x^{2} + 5\cancel{x} - \cancel{1}$ donc $f'(x) = 3\times 2x^2 + 2\times 4x + 5$ donc $f'(x) = 6x^2 + 8x + 5$.

Théorème 2 : Soit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polynôme du troisième degré et I un intervalle. Alors :

- Si pour tout x de I, $f'(x) > 0$ alors f est **croissante** sur I.
- Si pour tout x de I, $f'(x) < 0$ alors f est **décroissante** sur I.

Exemple 5 : Déterminer le tableau de variation des polynômes du troisième degré suivant :

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

On commence par calculer la dérivée f' : $f'(x) = 3x^2 - 2\times 6x + 9$ donc $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

La dérivée est un polynôme du second degré dont les coefficients sont $a = 3$; $b = -12$; $c = 9$.

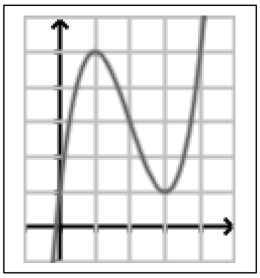
Pour déterminer son signe, on commence par chercher ses racines.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4\times 3\times 9 = 144 - 108 = 36 > 0$ donc f' admet deux racines :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-12)-\sqrt{36}}{2\times 3} = \frac{12-6}{6} = \frac{6}{6} = 1$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-12)+\sqrt{36}}{2\times 3} = \frac{12+6}{6} = \frac{18}{6} = 3$

La fonction f' est toujours du signe de a qui est positif, sauf entre ses racines.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	



$f(1) = 1^3 - 6\times 1^2 + 9\times 1 + 1 = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$

$f(3) = 3^3 - 6\times 3^2 + 9\times 3 + 1 = 27 - 54 + 27 + 1 = 1$

2) $f(x) = -2x^3 + x^2 - x - 1$

On commence par calculer la dérivée f' : $f'(x) = (-2)\times 3x^2 + 2x - 7 = -6x^2 + 2x - 1$

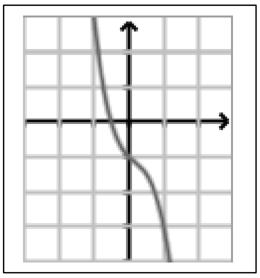
La dérivée est un polynôme du second degré dont les coefficients sont $a = -6$; $b = 2$; $c = -1$.

Pour déterminer son signe, on commence par chercher ses racines.

$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4\times(-6)\times(-1) = -20 < 0$ donc f' n'admet pas de racines.

La fonction f' est toujours du signe de a qui est négatif.

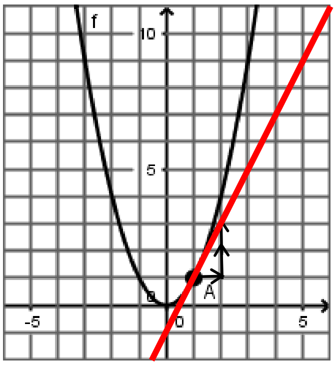
x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$		$\searrow$	



4 – Tangente à la courbe d'une fonction

Définition 3 : Soit f une fonction et A un point appartenant à la courbe de f. On appelle **tangente à la courbe de f** au point A et on note T_A la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(x_A)$.

Exemple 5 : On considère la fonction $f(x) = x^2$ dont on a tracé ci-dessous la courbe représentative ainsi que le point $A(1;1)$ appartenant à la courbe de f



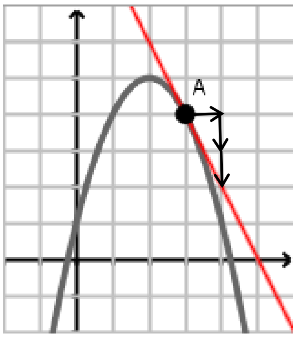
La dérivée f' de f est $f'(x) = 2x$

On a $x_A = 1$ donc $f'(x_A) = f'(1) = 2\times 1 = 2$

la tangente à la courbe de f en A est la droite qui passe par A et de coefficient directeur 2

Remarque : La tangente T_A est la droite qui approche le mieux la courbe de f autour de A. Elle frole la courbe et la touche en A. Le **nombre dérivée** $f'(x_A)$ correspond alors au coefficient directeur de cette tangente.

Exemple 6 : On considère la fonction $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ dont on a tracé ci-dessous la courbe représentative. On a tracé également la tangente à la courbe de f au point $A(3;4)$



1) Calculer le nombre dérivée $f'(3)$.

   La dérivée f' de f est $f'(x) = -2x + 4$

   On a donc $f'(3) = (-2)\times 3 + 4 = -2$

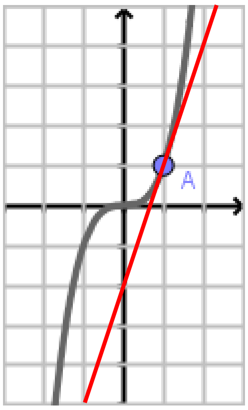
2) A l'aide de la tangente, vérifier le résultat graphiquement.

   $f'(3)$ correspond au coefficient directeur de la tangente T_A.

   On a donc $f'(3) = -2$.

Propriété 1 : Soit f une fonction et A un point appartenant à la courbe de f. Alors la tangente T_A a pour équation $y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$

Exemple 7 : On considère la fonction $f(x) = x^3$ dont on a tracé ci-dessous la courbe représentative.



1) Calculer la dérivée f' de f.

   $f'(x) = 3x^2$

2) Déterminer une équation de la tangente T_A.

   On a $x_A = 1$ donc la tangente T_A a donc pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

   Or $f'(1) = 3\times(1)^2 = 3$ et $f(1) = 1^3 = 1$. On a donc :

   $T_A: y = 3(x-1) + 1$ donc $T_A: y = 3x - 3 + 1$ donc $T_A: y = 3x - 2$

3) Tracer la tangente T_A

Dérivation – Exercices

Polynôme du premier et du second degré

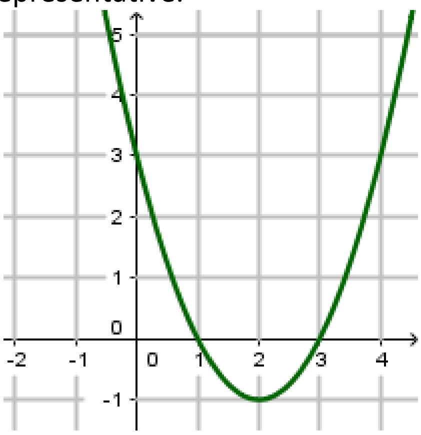
1 Réaliser le tableau de signe des fonctions affines suivantes :

a. $f(x) = 3x + 2$
b. $f(x) = -3x + 7$
c. $f(x) = \frac{1}{2}x - 4$
d. $f(x) = -x + 2$

2 Dériver les fonctions suivantes.

a. $f(x) = x^2 + 3x + 7$
b. $f(x) = 3x^2 - x - 5$
c. $f(x) = -2x + 7x + 10$
d. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 9$
e. $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$

3 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 3$. On a tracé ci-dessous sa courbe représentative.



1) Déterminer graphiquement le tableau de variation de la fonction f.
2) Calculer la dérivée f' de f.
3) Retrouver par le calcul le tableau de variation de la fonction f.

4 A l'aide de la dérivée f' de f, déterminer le tableau de variation de la fonction f, puis tracer dans un repère l'allure de la courbe f

a. $f(x) = x^2 + 2x + 1$
b. $g(x) = -3x^2 - 6x + 2$
c. $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x$
d. $k(x) = 2x^2 + x + 1$

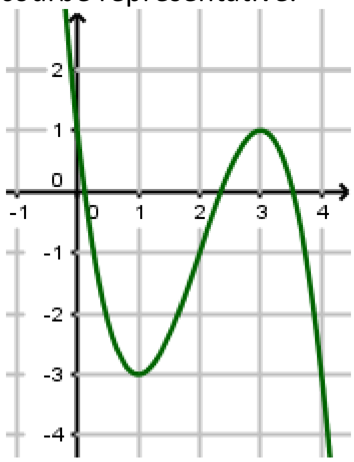
5 Effectuer une étude complète (tableau de variation, tableau de signe, courbe) de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 5x - 4$.

Polynôme du troisième degré

6 Dériver les fonctions suivantes.

a. $f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$
b. $f(x) = 3x^3 + 7x^2 - 10$
c. $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 5x$
d. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$
e. $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 0{,}5$

7 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$. On a tracé ci-dessous sa courbe représentative.

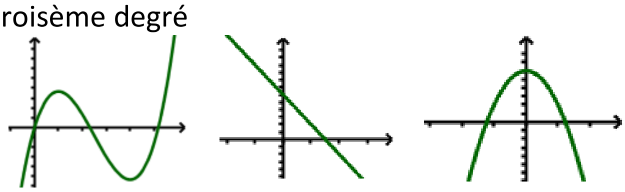


1) Déterminer graphiquement le tableau de variation de la fonction f.
2) Calculer la dérivée f' de f.
3) Retrouver par le calcul le tableau de variation de la fonction f.

8 A l'aide de la dérivée f' de f, déterminer le tableau de variation de la fonction f, puis tracer dans un repère l'allure de la courbe f

a. $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 8x$
b. $g(x) = 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$
c. $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x - 1$
d. $k(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2{,}5x^2 - 4x + 1$

9 Pour chacune des courbes suivantes préciser s'il s'agit d'un polynôme du premier, second ou troisème degré



Problèmes d'optimisation

10 **(Boite sans couvercle)**

La problématique de l'exercice est la suivante : A l'aide d'un simple feuille A4, comment construire une boite sans couvercle (voir *Figure 1*) de volume maximale ?

Le patron d'une telle boite est obtenue en découpant 4 coins de même dimension sur la feuille A4 (voir *Figure 2*). En fonction de la taille x du coin découpé on obtiendra une boite de volume différente.

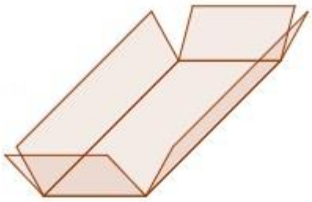


Figure 1

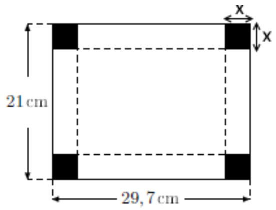


Figure 2

1) On note $V(x)$ le volume de la boite obtenue en découpant un coin de x cm.
   a. Calculer $V(1)$ et $V(5)$.
   b. Quel est l'ensemble de définition de la fonction V ?
   c. Exprimer $V(x)$ en fonction de x puis montrer que
   $$V(x) = 4x^3 - 10{,}14x^2 + 623{,}7x$$
2) Etude de la fonction V
   a. Calculer $V'(x)$
   b. Réaliser le tableau de variation de la fonction V.
   c. Quel est le maximum de la fonction V sur son ensemble de définition. En quelle valeur est-il atteint ?
3) Conclusion
   a. Répondre à la problématique
   b. Est-il possible de construire une boite d'exactement $1L$?

11 **(Coût moyen minimal)**

Une entreprise fabrique et commercialise un produit chimique. La capacité de production est limitée à 9 tonnes.

On note $C(x)$ le coût total en milliers d'euros pour fabriquer x tonnes de ce produit avec $0 \leq x \leq 9$.

On admet que $C(x) = 0{,}2x^2 + 3{,}2$

On note $R(x)$ la recette en milliers d'euros obtenue en vendant x tonnes de ce produit. Ce produit est vendu 2000 euros la tonne. La recette pour x tonnes, en milliers d'euros est $R(x) = 2x$.

On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction coût.

Partie A : Lecture graphique

1) Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :
   a. Quel est le coût de fabrication pour une production journalière de 3 tonnes ?
   b. Pour quelle quantité d'objets, le coût de production n'excède pas 16000€ ?
2) a. Tracer la fonction R
   b. Déterminer graphiquement la quantité d'objets qu'il faut produire pour que l'entreprise soit bénéficiaire.

Partie B : Etude algébrique

Dans cette partie, on admet que la fonction coût est donnée par la formule $C(x) = 0{,}2x^2 + 3{,}2$.

1) Déterminer les coûts fixes.
2) Montrer que le bénéfice est donné par la formule $B(x) = -0{,}2x^2 + 2x - 3{,}2$
3) Calculer la dérivée B' de B.
4) Réaliser le tableau variation de la fonction B.
5) En déduire le bénéfice maximal que l'entreprise peut réaliser ainsi que la production journalière correspondante.

12 **(Bénéfice maximal 2)**

Une entreprise produit des crayons de couleur. Lorsque la quantité q (exprimée en milliers) est comprise entre 4 et 10, on admet que le coût de production journalier (exprimé en euros) est donnée par $C(q) = q^3 - 48q - 600$

L'entreprise vend 99€ chaque milliers de crayons.

1) Déterminer les coûts fixes.
2) a. Exprimer la recette pour la vente de q milliers de crayons
   b. Montrer que le bénéfice journalier $B(q)$, exprimé en euros, est donnée par
   $$B(q) = -q^3 + 147q - 600$$
3) Calculer $B'(q)$.
4) a. Réaliser le tableau de variation de la fonction B
   b. En déduire la quantité de crayon que l'entreprise doit produire quotidiennement pour obtenir un bénéfice maximal.