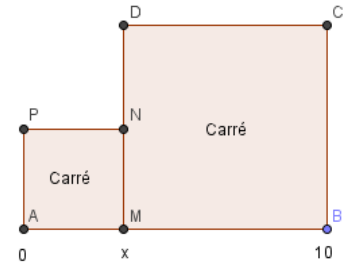


Chap 6 : Description d'une fonction - Activités

Activité 1 : Le problème des deux carrés

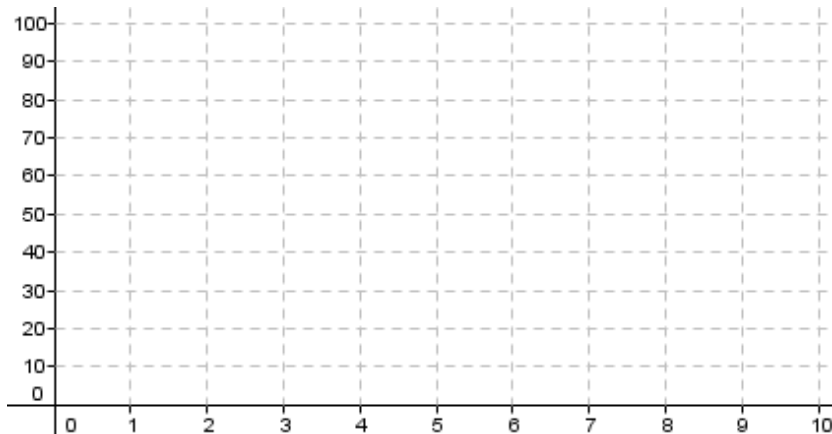
Dans la figure ci-contre $AMNP$ et $MBCD$ sont des carrés et $AB = 10$. M est un point « variable » sur le segment $[AB]$. On s'intéresse à l'aire totale de la figure (c'est à dire la somme des aires des 2 carrés) en fonction de la position du point M sur le segment $[AB]$. Pour une position x du point M , on note $A(x)$ l'aire totale de la figure.



- 1) Réaliser la figure pour 2 ou 3 positions différentes du point M , puis déterminer l'aire totale de la figure pour les positions choisies.
- 2) a. Quelle est l'ensemble de définition de la fonction A .
b. Exprimer $A(x)$ en fonction de x .
- 3) a. A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

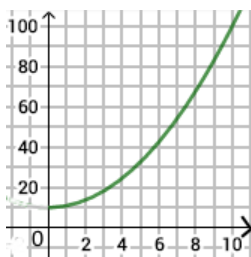
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$A(x)$											

- b. Dans le repère ci-dessous, tracer la courbe de la fonction A .



- 4) a. A l'aide d'un tableau de variation représenter l'évolution de l'aire en fonction de la position de M .
b. Quelle est l'aire maximale/minimale de la figure ?
c. Pour quelle position du point M , l'aire est-elle maximale/minimale ?

Activité 2 : Ordre des nombres



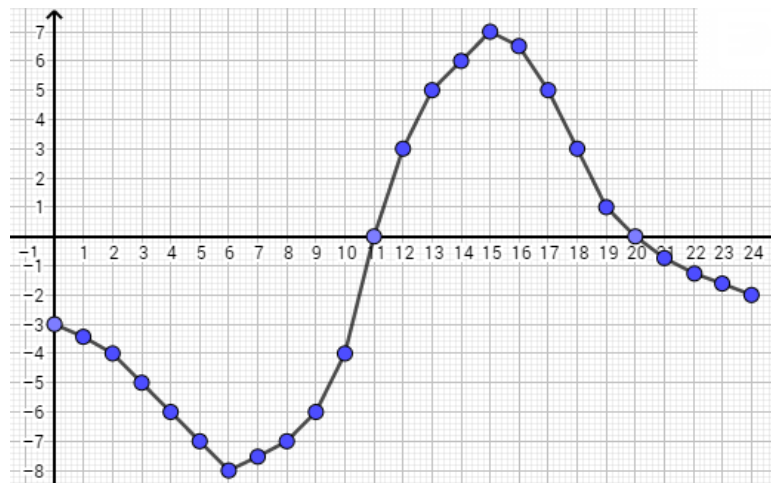
- 1) Indiquer le sens de variation de ces deux fonctions sur l'intervalle $I = [0; 10]$.
- 2) Choisir deux nombres quelconques a et b dans l'intervalle I tel que $a < b$.
- 3) Déterminer alors $f(a)$ et $f(b)$ puis comparer les.



Activité 3 : Courbe de température

Dans une station météo, on a relevé la température à chaque heure de la journée.

On obtient une courbe de température définie sur l'intervalle $[0; 24]$



- 1) La température à 8h du matin est-elle positive ou négative ?
- 2) A quelle heure la température est-elle de 0°C ?
- 3) A l'aide d'un tableau de signe préciser les heures où les températures sont positives/négatives.



Chapitre 6 : Description d'une fonction

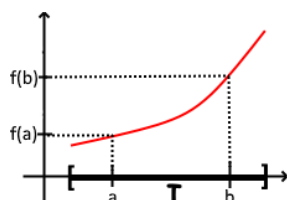
1 – Sens de variation

Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- On dit que f est **croissante** sur I si pour tous nombres a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) \leq f(b)$
- On dit que f est **décroissante** sur I si pour tous nombres a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) \geq f(b)$

Fonction croissante

Sa représentation graphique **monte**

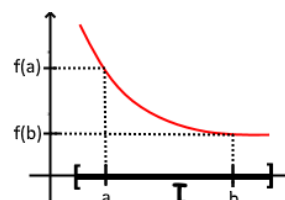


La fonction **conserve** l'ordre des nombres

x	a	b
$f(x)$	$f(a)$	$f(b)$

Fonction décroissante

Sa représentation graphique **descend**



La fonction **inverse** l'ordre des nombres

x	a	b
$f(x)$	$f(a)$	$f(b)$

Remarque : Pour représenter le sens de variation d'une fonction on utilise un **tableau de variation**.

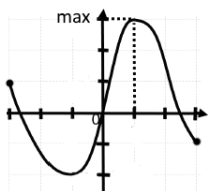
2 – Extremums

Définition 2 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- Le **maximum** de f sur I est la plus grande des images sur cet intervalle.
- Le **minimum** de f sur I est la plus petite des images sur cet intervalle.

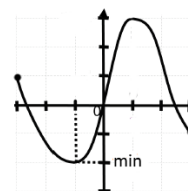
Maximum

Le maximum est le point le plus **haut** de la courbe

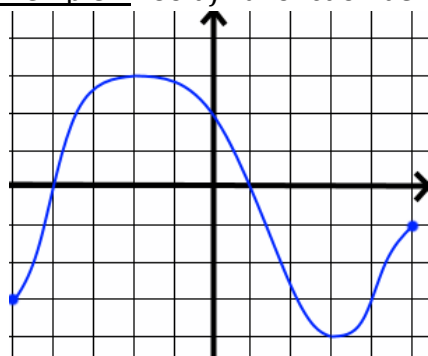


Minimum

Le minimum est le point le plus **bas** de la courbe



Exemple 1 : Soit f la fonction définie sur $[-5; 5]$ par la courbe ci-contre.



1) Réaliser le tableau de variation de la fonction f .

x	-5	-2	3	5
$f(x)$	-3	3	-4	-1

2) Déterminer le(s) extremum(s) de la fonction f .

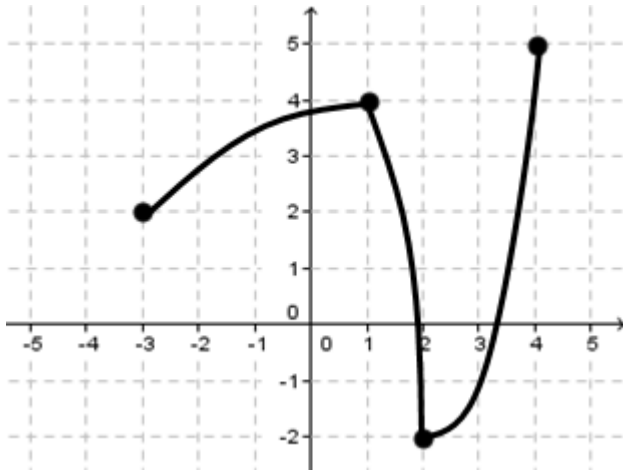
Le maximum de f est 3 atteint en $x = -2$.

Le minimum de f est -4 atteint en $x = 3$.



Exemple 2 : Soit f une fonction dont on donne ci-dessous le tableau de variation.

x	-3	1	2	4
$f(x)$	2	4	-2	5



- 1) a. Déterminer les extremums de la fonction f sur son ensemble de définition.

*Le maximum de f est 5 atteint en $x = 4$.
Le minimum de f est -2 atteint en $x = 2$.*

- b. Quel est le maximum de f sur $[-3; 2]$?

Le maximum de f sur $[-3; 2]$ est 4 atteint en 1.

- 2) a. Comparer $f(0,01)$ et $f(0,1)$.

$f(0,01) < f(0,1)$ car f est croissante sur $[-3; 1]$

- b. Comparer $f(1,01)$ et $f(1,1)$.

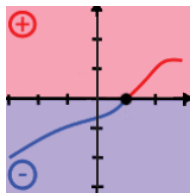
$f(1,01) > f(1,1)$ car f est décroissante sur $[1; 2]$

- 3) Tracer dans le repère ci-contre, une courbe compatible avec son tableau de variation.

3 – Signe d'une fonction

Définition 2 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

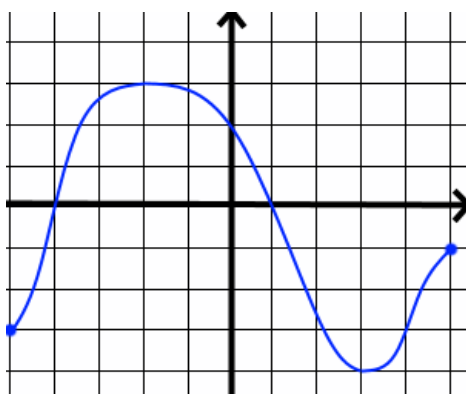
- On dit que f est **positive** sur I si pour tout nombre x de I , $f(x) \geq 0$
- On dit que f est **négative** sur I si pour tout nombre x de I , $f(x) \leq 0$
- On dit que f est **s'annule** en x_0 si $f(x_0) = 0$



- f est **positive** lorsque sa courbe est **au-dessus** de l'axe des abscisses.
- f est **négative** lorsque sa courbe est **au-dessous** de l'axe des abscisses.
- f est **s'annule** lorsque sa courbe **coupe** l'axe des abscisses.

Remarque : Pour représenter le signe d'une fonction on utilise un **tableau de signe**.

Exemple 3 : Soit f la fonction définie sur $[-5; 5]$ par la courbe ci-dessous.



- 1) En quelle valeur la fonction f s'annule-t-elle ?

f s'annule en $x = -4$ et en $x = 1$.

- 2) Quel est le signe de $f(0)$? de $f(5)$?

$f(0) > 0$ et $f(5) < 0$

- 3) Réaliser le tableau de signe de la fonction f .

x	-5	-4	1	5
$f(x)$		-	0	+
			0	-

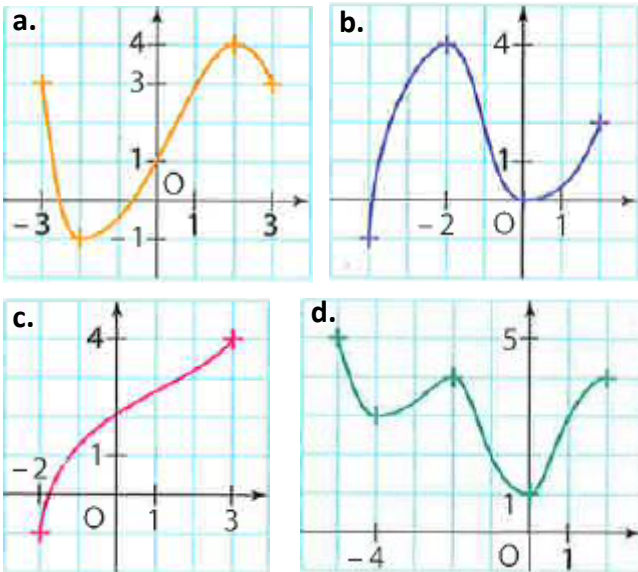


Description d'une Fonction - Exercices

Sens de variation & Extremums

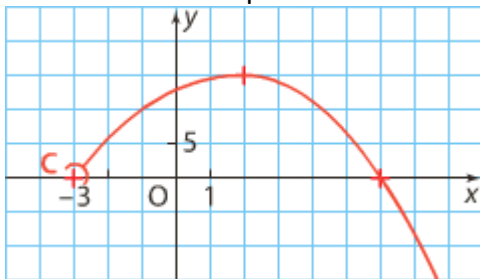
1 (Tableau de variation d'une courbe)

Réaliser le tableau de variation de la fonction f définie par la courbe donnée :



2 (Tableau & Extremums d'une courbe)

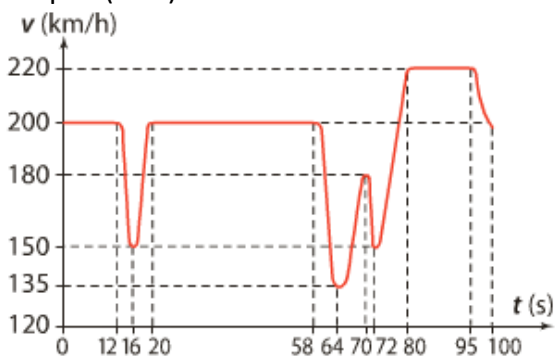
Soit f la fonction définie par la courbe suivante :



- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Réaliser le tableau de variation de f .
- 3) Etudier les extremums de la fonction f .

3 (Course automobile)

Lors d'un Rallye de formule 1, on a enregistré la vitesse v de l'automobile (en km/h) en fonction du temps t (en s). On a obtenu la courbe suivante :



- 1) Représenter l'évolution de la vitesse à l'aide d'un tableau de variation
- 2) Préciser les valeurs extrémales de sa vitesse.

4 (Courbe possible)

A partir du tableau de variation de la fonction f , tracer une courbe possible de f .

a.

x	-5	-1	3	4
f	3		4	0

b.

x	$-\infty$	-2	0	1	3	9
f		-3	-1	4	0	-2

c.

x	$-\infty$	-2	3	10
f		5	-3	0

- $f(-4) = 2$ et $f(-6) = -1$
- La courbe de f coupe l'axe des abscisses au point d'ordonnée 1
- Pour tout nombre $x < 0$, $f(x) \geq -2$

5 (Tableau 1)

Soit f une fonction définie sur $I = [-10; 25]$ dont on donne ci-dessous le tableau de variation.

x	-10	0	11	20	25
f	-40	35	12	15	-68

- 1) Etudier les extremums de f sur I .
- 2) Etudier les extremums de f sur $[-10; 11]$.
- 3) Compléter les inégalités suivantes :
 - a. $\dots \leq f(-2) \leq \dots$
 - b. $\dots \leq f(2) \leq \dots$

6 (Tableau 2)

Soit g une fonction définie dont on donne ci-dessous le tableau de variation.

x	-6	-4	-1	0	2	7
g	-4	2	8	2	-2	1

- 1) Donner l'ensemble de définition de g
- 2) Etudier les extremums de la fonction g
- 3) Combien 0 a-t-il d'antécédent par g ?
- 4) Résoudre l'inéquation $g(x) \geq -2$
- 5) Les affirmations suivantes sont-elles vraies ?
 - a. $f(-3) \geq 0$
 - b. $f(3) \leq 0$

7 (Comparaison 1)

x	-6	2	10
f	5	8	-4

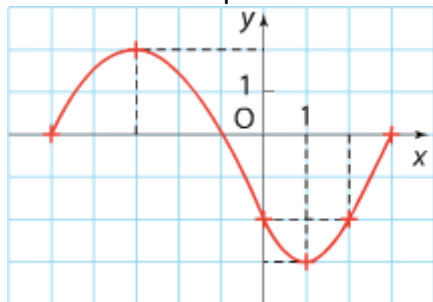
Comparer les nombres suivants :

- a. $f(-3)$ et $f(-1)$
- b. $f(3.001)$ et $f(3.01)$



8 (Comparaison 2)

Soit f la fonction définie par la courbe suivante :



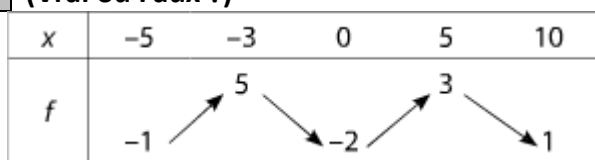
1) Comparer les nombres suivants :

a. $f\left(\frac{3}{2}\right)$ et $f\left(\frac{9}{4}\right)$ b. $f(0,01)$ et $f(0,1)$

2) Compléter l'affirmation suivante :

Si $x \in [-3; 1]$ alors $f(x) \in \dots\dots\dots$

9 (Vrai ou Faux ?)



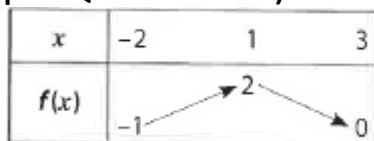
- $f(1) < f(4)$
- $f(-3) > f(-1)$
- $f(-4) < 5$
- Si $x \in [5; 10]$ alors $f(x) > 0$
- Si $f(2) = 0$ alors $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

10 (Logique : Implication)

On considère une fonction f définie sur \mathbb{R} . Pour chacune des affirmations suivantes dire si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse :

- Si la fonction f est croissante sur $[0; 2]$ alors f est croissante sur $[0; 1]$
- Si f est croissante sur $[0; 2]$ alors $f(0.5) \geq f(1)$
- Si $f(0) < f(1)$ alors f est croissante sur $[0; 1]$.
- Si f a un maximum en 1 sur $[0; 1]$ alors f est croissante sur $[0; 1]$
- Si f n'est pas croissante sur $[0; 1]$ alors f est décroissante sur $[0; 1]$

11 (Logique : Quantificateurs)



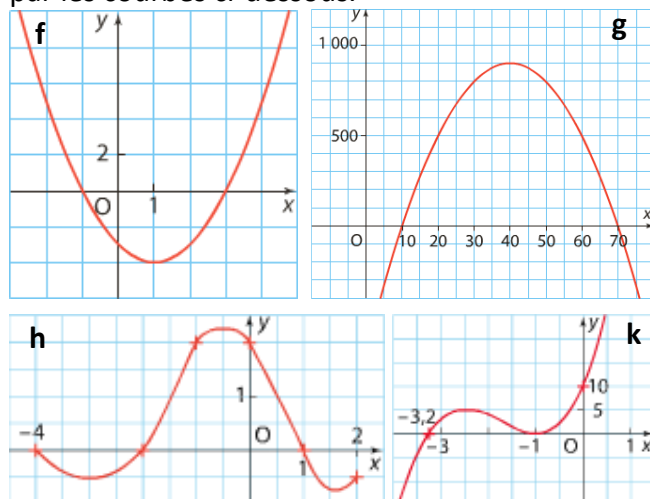
Vrai ou Faux ? Justifier votre réponse.

- Pour tout nombre $x \in [-2; 3]$, $f(x) \geq 0$
- Pour tout nombre $x \in [-2; 3]$, $f(x) \leq 3$
- Il existe un nombre $x \in [-2; 3]$ tel que : $f(x) < 0$
- Il existe un nombre $x \in [-2; 3]$ tel que : $f(x) = -2$
- Pour tout nombre $x \in [-2; 3]$, $f(x) \leq f(1)$

Signe

12 (Tableau de signe)

On considère quatre fonctions f , g , h et k définies par les courbes ci-dessous.



- Réaliser le tableau de signe de f , g , h et k
- Résoudre les inéquations suivantes :
 - $f(x) \leq 0$
 - $g(x) > 0$
 - $h(x) \leq 0$
 - $k(x) > 0$

13 (A partir d'un tableau de variation)

1) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

x	$-\infty$	-1	2	8	15	22	$+\infty$
f		-3	-10	0	$\sqrt{2}$	0	

- Quel est le signe de f sur $] -\infty; 8]$?
 - Si $x \geq 22$, quel est le signe de f ?
 - Construire le tableau de signe de f
- 2) A partir des tableaux de variation ci-dessous, réaliser le tableau de signe des fonctions g et h .

x	-1	0	1	3	4	6
$g(x)$	1	3	0	-1	0	2

x	-3	-2	-1	4	6
$h(x)$	-5	0	2	0	3

- Résoudre les inéquations suivantes :
 - $f(x) > 0$
 - $g(x) \leq 0$
 - $h(x) \leq 0$
 - $f(x) \geq 0$

14 (Courbe possible)

A partir du tableau de signe ci-dessous, tracer une courbe possible pour la fonction f .

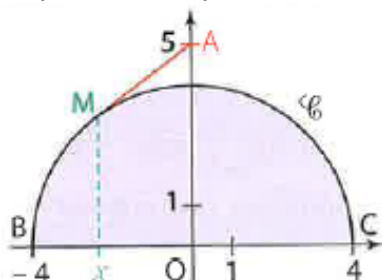
x	$-\infty$	-4	1	5	$+\infty$
$f(x)$		+ 0	- 0	+ 0	+



Problèmes

15 (Distance AM)

Dans le repère orthonormé ci-dessous, on a tracé le demi-cercle C de centre O (l'origine du repère) et de rayon 4. Le point A a pour coordonnées $A(0; 5)$. M est le point « variable » d'abscisse x du demi-cercle C avec $-4 \leq x \leq 4$. On définit alors une fonction f en posant $f(x) = AM$

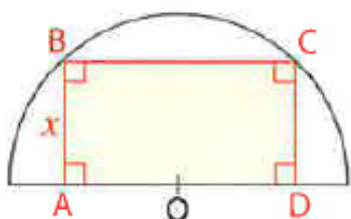


Réaliser le tableau de variation de la fonction f .

16 (Hangar)



Dans un hangar de forme semi-circulaire de 10 m de long, on souhaite intégrer une pièce de forme rectangulaire de volume maximal. Pour cela, on a représenté sur la figure suivante, une vue de face du hangar :



$ABCD$ est un rectangle inscrit dans le demi-cercle de centre O et de rayon 6 m. Ses côtés ont des longueurs variables et on note x la longueur AB . On note alors $A(x)$ l'aire du rectangle $ABCD$.

- 1) a. Dans quel intervalle varie x ?
 b. Justifier que $OA^2 + x^2 = 36$
 c. En déduire l'expression de OA puis de AD en fonction de x
 d. Exprimer $A(x)$ en fonction de x .
- 2) a. A l'aide de la calculatrice, tracer la courbe représentative de la fonction A . On pourra utiliser la fenêtre suivante :
 $Xmin = 0; Xmax = 6; Ymin = 0; Ymax = 50$
 b. A l'aide de la fonction TRACE, lire le maximum de la fonction A ainsi que la valeur en laquelle il est atteint
- 3) Conclure sur les dimensions de la pièce permettant d'obtenir un volume maximal.

17 (Boîte sans couvercle)

La problématique de l'exercice est la suivante : A l'aide d'un simple feuille A4, comment construire une boîte sans couvercle (voir Figure 1) de volume maximale ?

Le patron d'une telle boîte est obtenue en découpant 4 coins de même dimension sur la feuille A4 (voir Figure 2). En fonction de la taille x du coin découpé on obtiendra une boîte de volume différente.

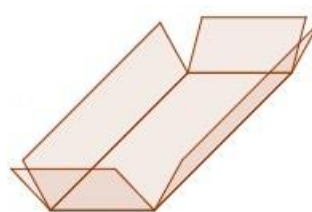


Figure 1

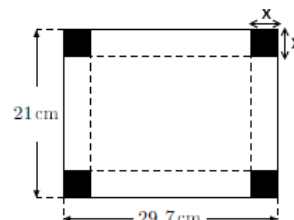
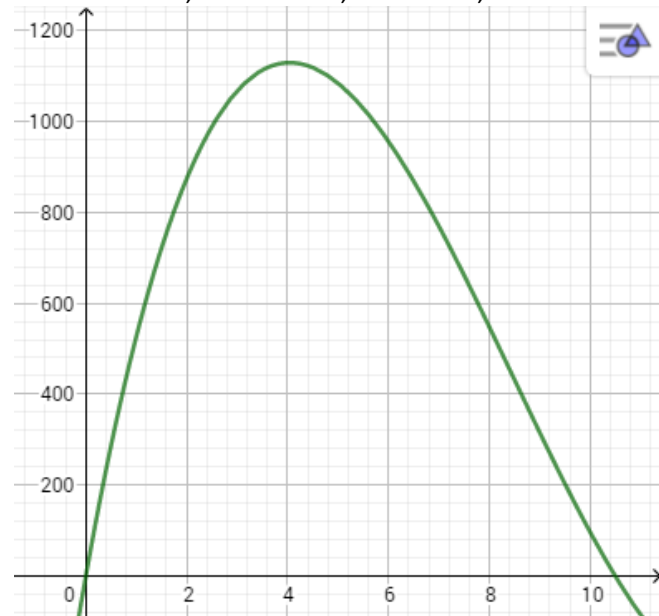


Figure 2

- 1) On note $V(x)$ le volume de la boîte obtenue en découpant un coin de x cm.
 - a. Calculer $V(1)$ et $V(5)$.
 - b. Quel est l'ensemble de définition de la fonction V ?
 - c. Exprimer $V(x)$ en fonction de x puis montrer que
- 2) A l'aide de la calculatrice, tracer la courbe représentative de la fonction V . On pourra utiliser la fenêtre suivante :

$$V(x) = 4x^3 - 101,4x^2 + 623,7x$$

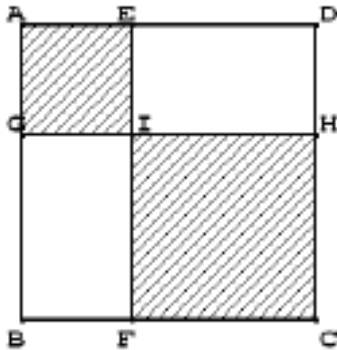


- 3) A l'aide de la fonction TRACE, lire le maximum de la fonction A ainsi que la valeur en laquelle il est atteint.
- 4) a. Conclure sur les dimensions de la boîte, permettant d'obtenir un volume maximal.
 b. Est-il possible de construire une boîte d'exactement 1L ?



18 (Aire hachurée)

$ABCD$ est un carré de côté 5 cm. E est un point du segment $[AD]$. G est le point du segment $[AB]$ tel que $AE = AG$. La parallèle à (AB) passant par E coupe $[BC]$ en F . La parallèle à (AD) passant par G coupe $[DC]$ en H . (GH) et (EF) se coupent en I . (voir figure ci dessous) On va étudier l'aire (notée $A(x)$) de la partie hachurée lorsque E se déplace sur $[AD]$. On pose $AE = x$

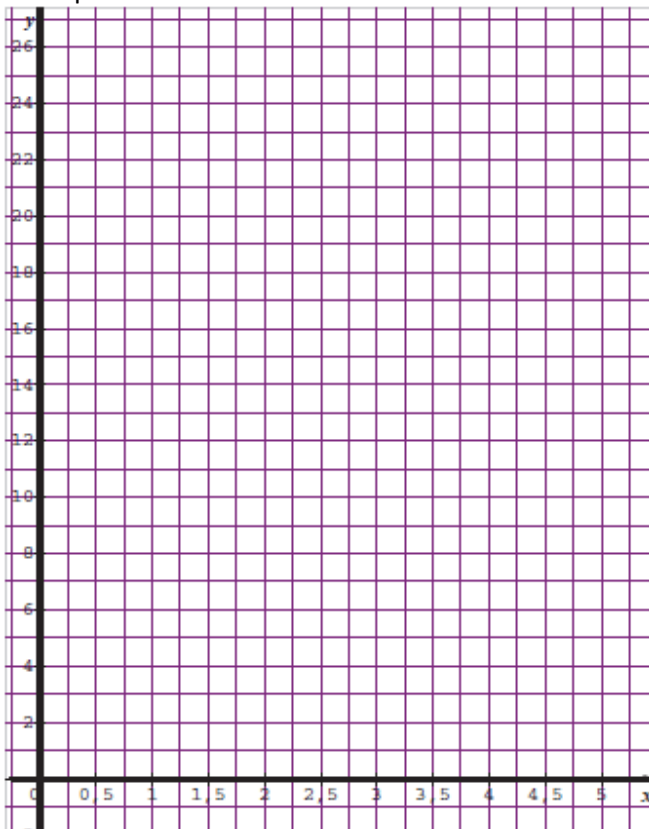


- 1) a. Quelles sont les valeurs possibles de x ?
 b. Exprimer en fonction de x la longueur IH .
 c. Calculer l'aire de la partie hachurée et vérifier que l'aire hachurée s'exprime par $A(x) = 2x^2 - 10x + 25$

- 2) a. Compléter à l'aide de la calculatrice le tableau de valeurs suivant :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$A(x)$											

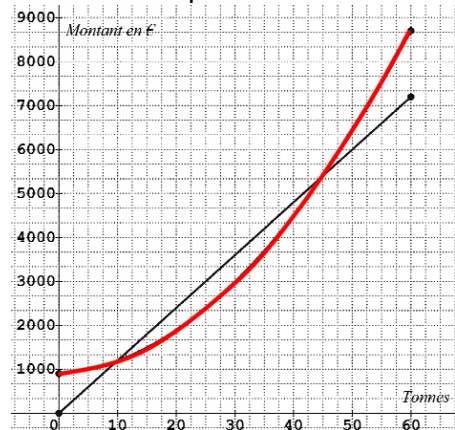
- b. Dans le repère ci-dessous, tracer la courbe représentative de la fonction A .



- 3) a. Pour quelle valeur de x l'aire est-elle minimale ? Combien vaut cette aire minimale ?
 b. Construire la figure pour cette valeur.

19 (Bénéfice)

Une entreprise produit de la farine de blé, x est le nombre de tonnes fabriquées avec $0 \leq x \leq 60$. Le prix de vente d'une tonne de farine est 120€€. Le coût de production de la fabrication de x tonnes de farine, exprimé en euros, est donnée par $C(x) = 2x^2 + 10x + 900$. Le graphique ci-dessous donne la courbe représentant le coût de production et celle représentant la recette.

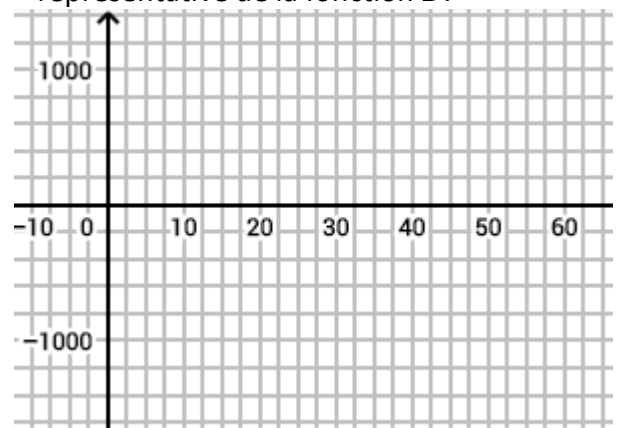


- 1) Déterminer graphiquement puis par le calcul le bénéfice réalisé pour 30 T de farine produites.
- 2) a. Exprimer, en fonction de x , la recette $R(x)$ de l'entreprise pour x tonnes vendues.
 b. En déduire, en fonction de x , le bénéfice $B(x)$ de l'entreprise pour x tonnes vendues.
- 3) a. A l'aide de la calculatrice compléter les tableaux de valeurs suivants :

x	0	10	20	30	40	50	60
$B(x)$							

x	20	22.5	25	27.5	30
$B(x)$					

- b. Dans le repère suivant, tracer la courbe représentative de la fonction B .



- 4) A l'aide du graphique précédent déterminer
 - a. la quantité de farine à produire pour que l'activité de l'entreprise soit rentable.
 - b. la quantité de farine à produire pour que le bénéfice de l'entreprise soit maximal.
 - c. La valeur de ce bénéfice maximal.
- 5) Retrouver ces résultats avec le 1^{er} graphique.

