Ensembles de nombres - Cours

1 – Les principaux « grands ensembles » de nombres

- L'ensemble des **entiers naturels** : Ce sont les entiers positifs ou nul. Il est noté $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$.

  Exemple : 0 et 25348 des entiers naturels. On note $25348 \in \mathbb{N}$

- L'ensemble des **entiers relatifs** : Ce sont tous les nombres entiers, positifs, négatifs ou nul.

  Il est noté $\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$.

  Exemple : -5 et 28 sont des entiers relatifs. On note $-5 \in \mathbb{Z}$.

- L'ensemble des **nombres décimaux** : Ce sont les nombres à virgule, avec un nombre fini de décimales.

  Cette ensemble est noté $\mathbb{D}$.

  Exemple : $0{,}5$ et $-2{,}18$ sont des nombres décimaux. On note $0{,}5 \in \mathbb{D}$.

- L'ensemble des **nombres rationnels** : Ce sont les nombres qui peuvent s'écrire sous forme d'une fraction $\frac{p}{q}$ de deux entiers p et q (avec $q \neq 0$). Cet ensemble est noté $\mathbb{Q}$.

  Remarque : Les nombres qui ne sont pas rationnels sont dit **irrationnels.**

  Exemple : $\frac{1}{3}$ et $-\frac{2}{5}$ sont des nombres rationnels mais $\sqrt{2}$ est irrationnel . On note $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

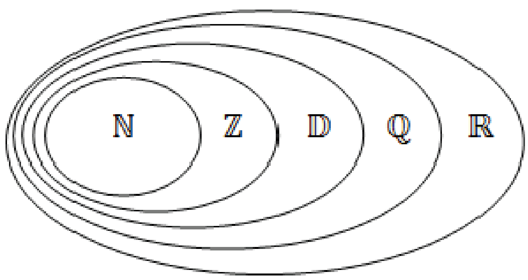
- L'ensemble des **nombres réels :** Ce sont tous les nombres rationnels et irrationnels. Il est noté $\mathbb{R}$.

  Exemple : π, $\sqrt{2}$, $\frac{1}{3}$ et 10 sont des nombres réels. On note $\pi \in \mathbb{R}$.

Remarque :

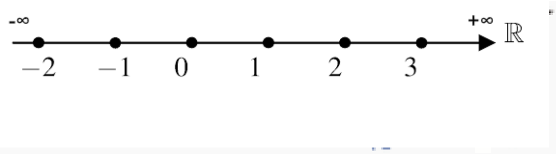
- Tous les nombres entiers sont des nombres décimaux : On a par exemple $2 = 2{,}000$.
- Tous les nombres décimaux sont des nombres rationnels : On a par exemple $2{,}53 = \frac{253}{100}$.
- Les nombres rationnels sont **périodiques** : A partir d'une certaine décimale, la suite des chiffres se répète indéfiniment. Par exemple : $\frac{1}{3} = 0{,}333\dots$; $\frac{3}{14} = 0{,}21\ 42857\ 42857\ \dots$; $\frac{2}{5} = 0{,}4 = 0.4000\dots$
- Les nombres irrationnels ne sont pas périodiques : $\pi = 3.14159265359\dots$

Relations entre les ensembles



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

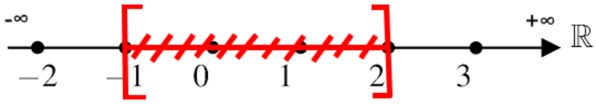
La droite réelle



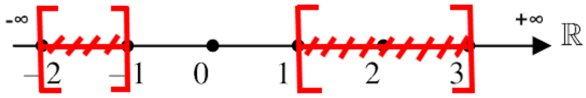
L'ensemble des nombres réels peut être représenté à l'aide d'une **droite graduée.**

2 – Intervalles

Définition 1 : Un intervalle est une partie de la droite réelle en « un seul morceau »



Ceci est un intervalle : C'est l'ensemble des nombres compris entre -1 et 2. Il est noté $[-1; 2]$.



Ceci n'est pas un intervalle. La partie comporte « plusieurs morceaux ».

- Les intervalles **bornées**

Intervalles	Ensemble des réels x tel que…	Représentation graphique
[a;b]	$a \leq x \leq b$	
]a;b[	$a < x < b$	
[a;b[	$a \leq x < b$	
]a;b]	$a < x \leq b$	

- Les intervalles **non-bornées**

Intervalles	Ensemble des réels x tel que…	Représentation graphique
$[a;+\infty[$	$a \leq x$	
$]a;+\infty[$	$a < x$	
$[-\infty;b]$	$x \leq b$	
$[-\infty;$b[	$x < b$	

Remarque :

- $[a; b]$ est dit **fermé**

  $]a; b[$ est dit **ouvert.**

  $[a; b[$ et $]a; b]$ sont dits **semi-ouverts.**
- Les bornes en l'infini sont toujours ouvertes.
- On a les égalités suivantes :

  $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

  $[a; a] = \{a\}$

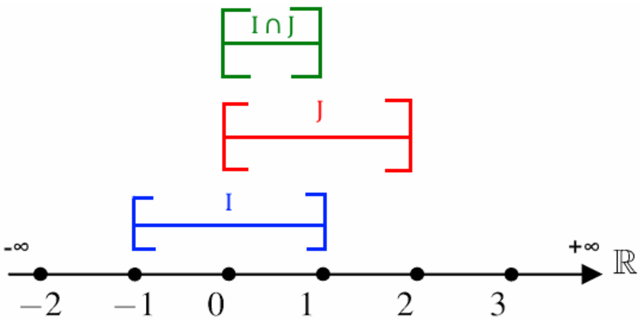
  $]a; a[= \emptyset$

3 – Intersection, Réunions d'intervalles

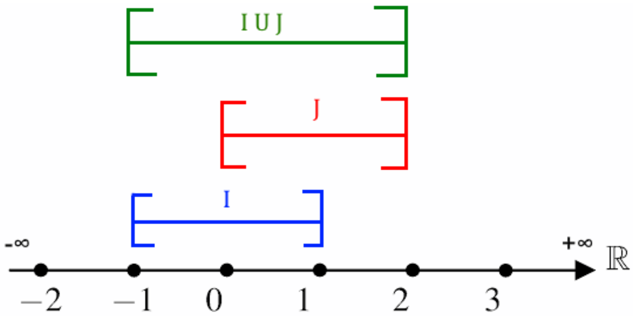
Définition 2 : Soit I et J deux intervalles.

- L'**intersection** de I et J, noté $I \cap J$, est l'ensemble des nombres réels qui sont à la fois dans I et dans J.
- La **réunion** de I et J, noté $I \cup J$, est l'ensemble des nombres réels qui sont dans I ou dans J.

Intersection



Réunion



Remarque : La réunion de deux intervalles n'est pas toujours un intervalle.

Ensembles de nombres - Exercices

Nombres

1 (Ensemble de nombres)

Placer tous les nombres suivants sur les deux figures ci-dessous :

$$-1\,;\,\frac{3}{2}\,;\,\pi\,;\,\sqrt{2}\,;\,\frac{4}{7}\,;\,-\frac{2}{5}\,;\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\,10^{10}\,;\,\frac{4}{2}\,;\,\sqrt{9}$$

Figure 1 :

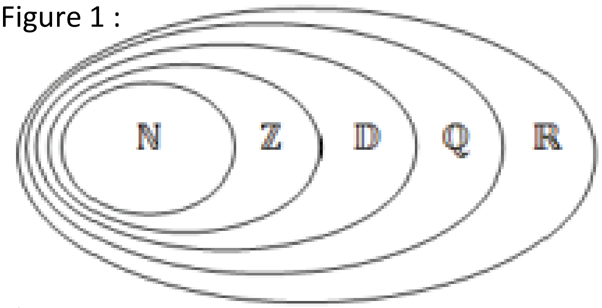
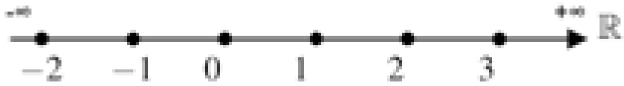


Figure 2 :



2 (Calculatrice)

1) A l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée, à 10^{-2} près, des nombres suivants:

$A = \frac{-5+8}{10-1}$ $\quad B = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$C = \left(\frac{3}{4}\right)^5$ $\quad D = \sqrt{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2 + (5-4)^2}$

2) A l'aide de la calculatrice, écrire les nombres suivants en utilisant l'écriture scientifique :

$E = \pi^{25}$ $\quad F = (1+10^5)^{-5}$

$G = \left(\frac{1}{1+1} - 1\right)^{11}$ $\quad H = 3^{3^{3^3}}$

3) A l'aide de la calculatrice, simplifier les fractions suivantes :

$I = \frac{720}{2520}$ $\quad J = \frac{120}{48}$

$K = \frac{\frac{3}{2}+\frac{5}{4}}{2}$ $\quad L = \frac{1248}{4266}$

3 (Fractions)

Calculer puis simplifier les fractions suivantes :

$A = \frac{3}{4} + \frac{9}{4}$ $\quad C = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$D = \frac{3}{4} + \frac{2}{5}$ $\quad D = 3 - \frac{1}{3}$

$E = \frac{1}{3} \times \frac{5}{2}$ $\quad F = 3 \times \frac{4}{11}$

$G = \frac{2}{15} \times \frac{5}{2}$ $\quad H = \frac{24}{81} \times \frac{5}{60}$

$I = \frac{2}{\frac{4}{3}}$ $\quad J = \frac{\frac{3}{5}}{2}$

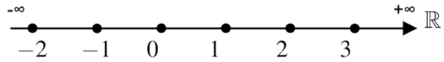
$K = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}$ $\quad L = \left(\frac{4}{7}\right)^2$

Intervalles

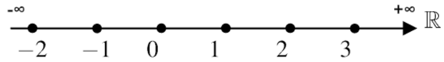
4 (Inégalité vers Intervalle)

Représenter sur la droite graduée l'ensemble des réels x vérifiant les inégalités suivantes, puis écrire cette ensemble à l'aide d'un intervalle :

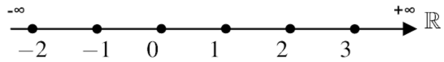
$-1 \leq x \leq 2$



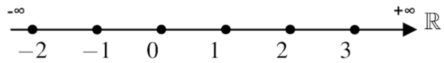
$-3 \leq x < 1$



$x \leq 0$



$x > -2$



5 (Intervalle vers Inégalité)

Traduire l'appartenance à l'intervalle I à l'aide d'une inégalité :

a. $I = [0; 2{,}5]$ $\quad$ b. $I =]-10; 9[$

c. $I =]-\infty; -0{,}5]$ $\quad$ d. $I =]0; +\infty[$

e. $I =]-2; 0]$

6 (Appartenance à un intervalle)

Compléter à l'aide des symboles $\in$ ou $\notin$:

a. -1 … $[-1; 2]$ $\quad$ b. $-\frac{2}{3}$ … $]-\infty; -1[$

c. 5.9 … $]5.8; +\infty[$ $\quad$ d. 7 … $[0; 7[$

7 (Circulation routière)

Répondre aux questions suivantes du code de la route en utilisant un intervalle :

1) A quelle vitesse peut-on rouler en agglomération ?

2) A quelle vitesse a-t-on le droit de rouler sur autoroute pour doubler une voiture qui roule à 110km/h ?

3) A quelle taux d'alcoolémie est-on considéré en infraction routière ?

8 (Appartenance à un intervalle)

Compléter à l'aide des symboles $\in$ ou $\notin$:

a. 3 … $[-1; 2] \cup [10; +\infty[$ $\quad$ b. 5 … $]0; 5[\cup [1; 20]$

c. 1 … $]-\infty; 0] \cap [0 + \infty[$ $\quad$ d. 1 … $]0; 1] \cap [1; 2]$

9 (Intersection & Réunion d'intervalles)

Dans chacun des cas, représenter sur un axe graduée les ensembles $I \cap J$ et $I \cup J$, puis écrire si possible ces ensembles sous forme d'intervalles.

a. $I = [-3; 2]$ et $J =]0; 5]$

b. $I = [-1; 0[$ et $J =]-2; 2]$

c. $I = [0{,}5\,; 3]$ et $J = [-2; 0]$

d. $I = [1; 2.5[$ et $J =]-2; 1]$