Equations/Inéquations Produit/Quotient - Activités

Activité 1 : Compléter ces égalités à trous afin que celles-ci soient vérifiées. Pour une égalité donnée, le même nombre doit être utilisé dans chacun des trous.

a. $2 \times (\square - 1) = 0$

b. $(\square - 4) \times 10 = 0$

c. $(\square - 2) \times (\square - 10) = 0$

d. $(6 + \square) \times (5 - \square) = 0$

e. $\square \times (2\times\square - 4) = 0$

f. $\square^2 \times (\square + 3) = 0$

g. $(8 - 4\times\square) \times (2\times\square - 1) = 0$

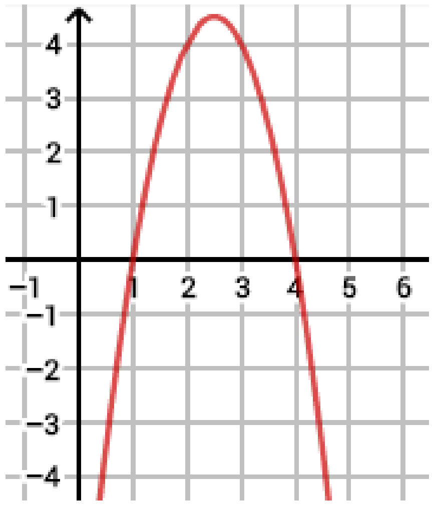
h. $\square \times (\square + 1) \times (\square - 1) = 0$

i. $\frac{3-\square}{\square-1} = 0$

j. $\frac{5\times\square+15}{2\times\square+1} = 0$

k. $\frac{2}{3\times\square+5} = 0$

Activité 2 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-8)(1-x)$. On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction f.



1) En quelle valeur la fonction f s'annule-t-elle ?

2) Réaliser graphiquement le tableau de signe de la fonction f

3) On pose $u(x) = 2x - 8$ et $v(x) = 1 - x$

   a. Quelle relation y a-t-il entre la fonction $f(x)$ et $u(x)$ et $v(x)$.

   b. Réaliser le tableau de signe de $u(x)$.

   c. Réaliser le tableau de signe de $v(x)$.

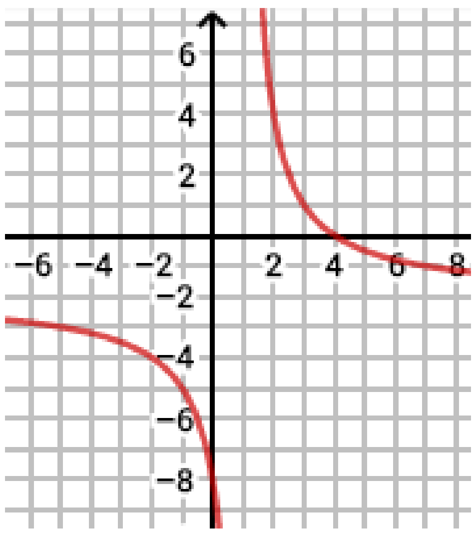
4) a. Quel est sur l'intervalle $[1; 4]$, le signe de $u(x)$? de $v(x)$? de $f(x)$?

   b. Compléter le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$
$u(x)$				
$v(x)$				
$f(x)$				

   c. A l'aide du tableau de signe résoudre l'inéquation $f(x) > 0$

5) On considère maintenant la fonction définie par $g(x) = \frac{2x-8}{1-x}$ dont la courbe est tracé ci-dessous.



   a. Quelle relation y a-t-il entre la fonction $g(x)$ et $u(x)$ et $v(x)$.

   b. Que se passe-t-il lorsque $x = 1$.

   c. Donner alors l'ensemble de définition de la fonction g.

   d. Compléter le tableau de signe suivant :

   On indiquera à l'aide d'une « double barre » la valeur interdite.

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$
$u(x)$				
$v(x)$				
$g(x)$				

   e. Résoudre $g(x) \leq 0$

Equations/Inéquations Produit/Quotient - Cours

1 – Equations

a. Equation produit-nul

Propriété 1 (Règle du produit nul) : Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul :

$$A(x) \times B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \ ou \ B(x) = 0$$

Exemple 1 : Résoudre les équations suivantes :

- $(x+2)(x-7) = 0$

$\Leftrightarrow x + 2 = 0$ ou $x - 7 = 0$
$\Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 7$
$S = \{-2; 7\}$

- $(3x-6)(5-x) = 0$

$\Leftrightarrow 3x - 6 = 0$ ou $5 - x = 0$
$\Leftrightarrow 3x = 6$ ou $x = 5$
$\Leftrightarrow x = \frac{6}{3} = 2$ ou $x = 5$
$S = \{2; 5\}$

- $x^2(4-3x) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 0$ ou $4 - 3x = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $4 = 3x$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{4}{3}$
$S = \left\{0; \frac{4}{3}\right\}$

- $(3x+1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow 3x + 1 = 0$ (car $(3x+1)^2 = (3x+1)(3x+1)$)
$\Leftrightarrow 3x = -1$
$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$
$S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

b. Equation quotient nul

Propriété 2 : Un quotient est nul si et seulement si le numérateur est nul et le dénominateur non nul :

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \ et \ B(x) \neq 0$$

Exemple 2 : Résoudre les équations suivantes :

- $\frac{4x-6}{3x+5} = 0$

$\Leftrightarrow 4x - 6 = 0$ et $3x + 5 \neq 0$
$\Leftrightarrow 4x = 6$ et $3x \neq -5$
$\Leftrightarrow x = \frac{6}{4} = 1.5$ et $x \neq -\frac{5}{3}$
$S = \{1.5\}$

- $\frac{x-2}{3x-6} = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 = 0$ et $3x - 6 \neq 0$
$\Leftrightarrow x = 2$ et $3x \neq 6$
$\Leftrightarrow x = 2$ et $x \neq \frac{6}{3}$
$\Leftrightarrow x = 2$ et $x \neq 2$ Impossible
$S = \emptyset$

c. Produit en croix

Propriété 3 : L'équation $\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{C(x)}{D(x)}$ est équivalent à $A(x)D(x) = B(x)C(x)$ lorsque $B(x) \neq 0$ et $D(x) \neq 0$

Exemple 3 : Résoudre les équations suivantes :

- $\frac{-4}{x} = \frac{2}{x+3}$

Il y a deux valeurs interdites : 0 et -3
Si $x \neq 0$ et -3, on peut écrire le produit en croix :
$-4(x+3) = 2x$
$\Leftrightarrow -4x - 12 = 2x$
$\Leftrightarrow -4x - 2x = 12$
$\Leftrightarrow -6x = 12$
$\Leftrightarrow x = \frac{12}{-6} = -2$
$S = \{-2\}$

- $\frac{2x}{x+1} = 3$

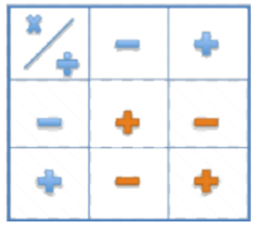
Il y a une valeur interdite : -1
Si $x \neq -1$, on peut écrire le produit en croix :
$2x = 3(x+1)$
$\Leftrightarrow 2x = 3x + 3$
$\Leftrightarrow 2x - 3x = 3$
$\Leftrightarrow -x = 3$
$\Leftrightarrow x = -3$
$S = \{-3\}$

2 – Inéquations

a. Signe d'un Produit/Quotient

Propriété 4 (Règle des signes) :

- Le produit/quotient de deux nombres positifs est positif
- Le produit/quotient de deux nombres négatifs est positif
- Le produit/quotient de deux nombres de signe opposés est négatifs



But : On connaît le signe de certaines fonctions simples (fonctions affines, fonctions de références).

En utilisant la règle des signes on peut donc déterminer le signe du produit/quotient de ces fonctions

Méthode :

1. On cherche pour quelle(s) valeur de x, chaque terme du produit/quotient s'annule
2. On réalise un « grand tableau » (Une ligne pour chaque terme du produit/quotient)
3. On complète le signe de chaque terme.
4. On applique la règle des signes

Exemple 4 : Etudier le signe des fonctions suivantes :

- $f(x) = (x-3)(2-5x)$

. $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

. $2 - 5x = 0 \Leftrightarrow 2 = 5x \Leftrightarrow x = \frac{2}{5} = 0.4$

x	$-\infty$		0.4		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$2-5x$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- $g(x) = \frac{3-2x}{1+2x}$

. $3 - 2x = 0 \Leftrightarrow 3 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} = 1.5$

. $1 + 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} = -0.5$

x	$-\infty$		-0.5		1.5		$+\infty$
$3-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+2x$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Remarque : Dans un quotient, la valeur qui annule le dénominateur est appelée une **valeur interdite**.

b. Résolution des inéquations Produit/Quotient

Propriété 5 :

- L'inéquation $f(x) \geq 0$ ($f(x) > 0$) est vérifiée lorsque la fonction f est (strictement) **positive**.
- L'inéquation $f(x) \leq 0$ ($f(x) < 0$) est vérifiée lorsque la fonction f est (strictement) **négative**.

Exemple 5 : Résoudre les inéquations suivantes

- $(x-3)(2-5x) \geq 0$

≥ 0 donc on prend tout ce qui est « $+$ » ou « 0 »

On trouve $S = [0.4; 3]$

- $\frac{2x-3}{1-2x} < 0$

< 0 donc on prend tout ce qui est « $-$ »

On trouve $S =]-\infty; -0.5[\cup]1.5; +\infty[$

Equation-Inéquation Produit-Quotient - Exercices

Produit

1 (Equation)

Résoudre les équations suivantes :

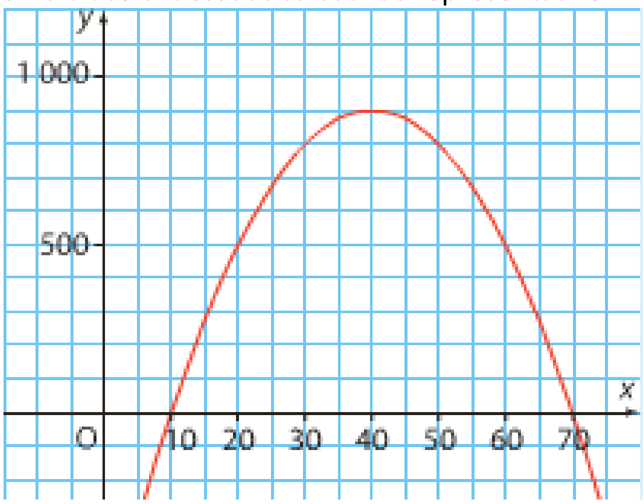
a. $(3+x)(5-x)=0$
b. $(2x-1)(3x+4)=0$
c. $x\left(\frac{1}{2}x-5\right)=0$
d. $x^2(1-4x)=0$
e. $(3x+9)^2=0$

2 (Fonction Produit)

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x)=(10-x)(x-70)$$

On a tracé ci-dessous sa courbe représentative.



Déterminer graphiquement, puis par le calcul :

a. Les antécédent(s) de 0 par h.
b. Le tableau de signe de la fonction h.

3 (Tableau de signe)

Réaliser le tableau de signe des fonctions suivantes puis vérifier à la calculatrice.

a. $f(x)=(3x-2)(4x+1)$
b. $f(x)=(3-7x)(x-6)$
c. $f(x)=(-x-2)(2-\frac{x}{3})$
d. $f(x)=x^2(-8x+12)$
e. $f(x)=-3(x-1)(x+2)$
f. $f(x)=(5x+1)^2$

4 (Inéquation)

Résoudre les inéquations suivantes (on donnera l'ensemble des solutions) :

a. $(5x-1)(-2x+1)>0$
b. $(-3x-7)(2x-5)\leq 0$
c. $\left(x-\frac{1}{2}\right)(2-10x)>0$
d. $-(x+1)(6-3x)\geq 0$
e. $x(x+1)(x-1)<0$

5 (Fonction infernale)

On considère la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$k(x)=(x-1)(x-2)\dots(x-2018)$$

1) Quel(s) sont les antécédents de 0 par f.
2) Déterminer le signe des nombres suivants :
   a. $k(0)$
   b. $k(2019)$
   c. $k(\sqrt{2})$
   d. $k(999{,}999)$

6 (Trouver une fonction 1)

Dans chacun des cas, proposer une fonction f qui vérifie les conditions suivantes :

a. f s'annule en 1 et -4
b. f s'annule en 0 ; -1 et $\frac{1}{2}$
c. f s'annule en -3 et 5 et est positive entre -3 et 5.
d. f coupe 4 fois l'axe des abscisses entre 0 et 1.

7 (Trouver une fonction 2)

Dans chacun des cas, proposer une fonction f à coefficients entier qui vérifie les conditions suivantes :

a. f s'annule en $\frac{4}{3}$ et $-\frac{2}{5}$.
b. f s'annule en $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$
c. f s'annule en $2\sqrt{5}$ et $-2\sqrt{5}$
d. f s'annule en $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
e. f s'annule en $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (Le nombre d'or)

Remarque : Il n'existe pas de fonction polynôme f à coefficients entiers qui s'annule en π. On dit que π est un nombre **transcendant.**

8 (Trouver une fonction 3)

Proposer une fonction f qui ne s'annule jamais.

9 (Factorisation)

Factoriser les expressions suivantes, puis réaliser le tableau de signe de ces expressions.

a. $A(x)=x^2-2x$
b. $A(x)=x^2-1$
c. $A(x)=(x+1)-x(x+1)$
d. $A(x)=(x+2)^2-16$
e. $A(x)=(2x+3)^2-(x-1)^2$

Rappel : Pour tout nombre a et b on a l'identité remarquable :

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

Quotient

10 (Equation)

Résoudre les équations suivantes :

a. $\frac{6+2x}{2-x} = 0$

b. $\frac{x-5}{15-3x} = 0$

c. $\frac{2x+9}{5x} = -1$

d. $\frac{1}{3x+4} = 2$

e. $\frac{6x+1}{3x-2} = \frac{2x+5}{x-3}$

11 (Tableau de signe)

Dans chacun des cas réaliser le tableau de signe de l'expression $A(x)$ en précisant les valeurs de x qui annulent le dénominateur :

f. $A(x) = \frac{5+2x}{3-7x}$

g. $A(x) = \frac{4-x}{x(x+2)}$

h. $A(x) = \frac{2x-5}{(x-2)^2}$

12 (Inéquation)

Résoudre les équations suivantes (on donnera l'ensemble des solutions) :

a. $\frac{3x+2}{x-5} \geq 0$

b. $\frac{4-7x}{2x+1} \geq 0$

c. $\frac{3x+7}{3x+5} < 0$

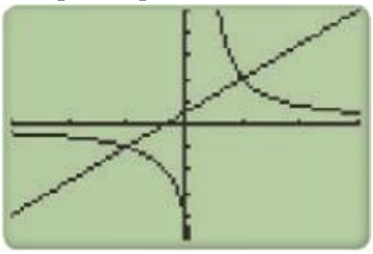
13 (Deux fonctions)

On considère les fonctions f et g définies par :

$f(x) = \frac{4}{3x-1}$ pour $x \neq \frac{1}{3}$.

$g(x) = \frac{3x+1}{2}$ pour tout nombre réel x.

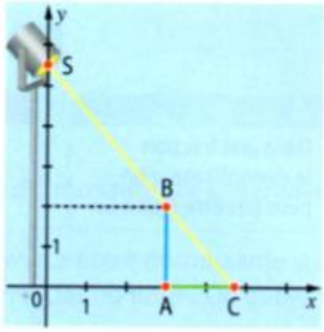
La vue d'écran ci-dessous donne les représentations graphiques de ces deux fonctions sur l'intervalle $[-3; 3]$



1) Identifier à quelle fonction correspond chaque courbe. Justifier votre réponse.
2) Résolvez graphiquement $f(x) = g(x)$.
3) Résolvez algébriquement cette équation.

14 (Une zone d'ombre)

Pour son nouveau film, un réalisateur fait construire un mur de $2\,m$ de haut qu'il veut éclairer sur toute sa hauteur. Il place un projecteur au sommet d'un mât télescopique, situé à $3\,m$ du mur, et de hauteur variable pouvant aller jusqu'à $10\,m$. Sur la figure ci-contre, le projecteur est représenté par le point S, le mur par le segment $[AB]$ et l'ombre par le segment $[AC]$.



1) a. Comment évolue la longueur de l'ombre en fonction de la hauteur du projecteur ?
   b. Que se passe-t-il lorsque le projecteur se trouve à hauteur du mur ?
2) Soit f la fonction qui, à la hauteur x du projecteur, associe la longueur de l'ombre correspondante.
   a. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
   b. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
   c. Dans le repère ci-dessous, tracer la courbe représentative de la fonction f.
3) A quelle hauteur faut-il placer le projecteur pour avoir une ombre de longueur $5\,m$?

x	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$