Chap 5 : Equations-Inéquations - Activités

Activité 1 : Egalités à trou(s)

Compléter ces égalités à trous afin que celles-ci soient vérifiées. Pour une égalité donnée, le même nombre doit être utilisé dans chacun des trous :

a. $2 \times \square = 6$

b. $5 \times \square = -45$

c. $3 \times \square - 15 = 0$

d. $2 \times \square + 4 = 10$

e. $24 - 4 \times \square = 48$

f. $50 - 6 \times \square = 8$

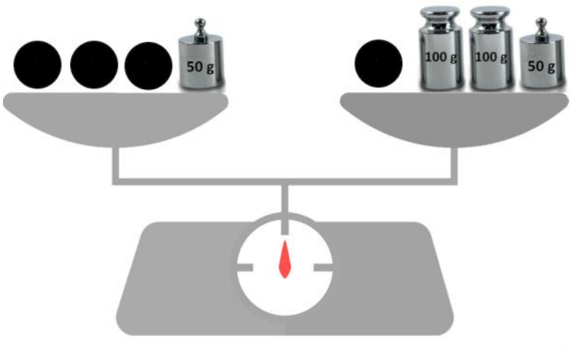
g. $\square + 2 \times \square = 15$

g. $3 \times \square - \square + 5 = 25$

h. $5 \times \square + 4 = 2 \times \square + 16$

i. $3 \times \square - 7 = 9 - \square$

Activité 2 : Balance



La balance ci-contre est équilibrée et toutes les billes ont la même masse. Quelle est la masse d'une bille noire ?

Activité 3 : Mise en équation

Voici trois problèmes…

Problème 1 : Un tiers de la surface d'un jardin est recouverte par une piscine et $4\ m^2$ sont utilisés par un local. Il reste alors $380\ m^2$. Quelle est l'aire en m^2 de ce jardin

Problème 2 : Une entreprise de 380 employés souhaite recruter 4 personnes. Le responsable du recrutement fait observer que si ces 4 personnes sont des hommes, il y aura seulement un tiers de femmes dans l'entreprise. Combien y a-t-il actuellement d'hommes dans cette entreprise ?

Problème 3 : On partage une somme entre trois personnes. La première personne reçoit un tiers de la somme, la deuxième reçoit 380 € et la troisième reçoit 4 € de plus que la première personne. Quelle est le montant, en euros, de la somme partagée ?

… et voici trois équations :

(A) $\frac{1}{3}x + 380 + \frac{1}{3}x + 4 = x$ (B) $\frac{1}{3}x + 4 + 380 = x$ (C) $x + 4 = \frac{2}{3} \times (380 + 4)$

1) a. Associer à chaque problème la bonne équation.

b. Dans chacun des cas que représente l'inconnue « x ».

2) Résoudre chacune des équations précédentes puis résoudre chacun des problèmes.

Chapitre 5 : Equations-Inéquations

1 – La notion d'équation/inéquation

Définition 1 :

- Une **équation/inéquation** est une égalité/inégalité avec une **inconnue**.
- Une **solution** de l'équation/inéquation est une valeur de l'inconnue qui rend l'égalité/inégalité vraie.
- **Résoudre** une équation/inéquation, c'est trouver toutes les solutions de cette équation/inéquation.

Remarque : Une équation peut avoir une, plusieurs ou aucune solution(s) et une inéquation une infinité.

Exemple 1 :

- $x^2 = 2x$ est une équation d'inconnue 'x'. 2 est une solution de cette équation car $2^2 = 4 = 2 \times 2$.
- $t - 5 > 0$ est une inéquation d'inconnue 't'. Les nombres supérieurs à 5 sont solution : $6 - 5 = 1 > 0$.

2 – Résolution algébrique

Définition 2 : Deux équations/inéquations sont dites **équivalentes** si elles ont les mêmes solutions.

Propriété 1 : Si on effectue la même opération sur les deux membres d'une équation on obtient une équation équivalente.

Principe de la balance

$3x + 8 = 26$

$\Leftrightarrow 3x + 8 - 8 = 26 - 8$ On enlève 8 des deux côtés.

$\Leftrightarrow 3x = 18$

$\Leftrightarrow \frac{3x}{3} = \frac{18}{3}$ On divise par 3 des deux côtés.

$\Leftrightarrow x = 6$

Méthode : Pour résoudre une équation du premier degré, on **isole** l'inconnu 'x'.

Exemple 2 : Résoudre les équations suivantes :

- $3x + 6 = 12$

$\Leftrightarrow 3x = 12 - 6 = 6$

$\Leftrightarrow x = \frac{6}{3} = 2$ $\boxed{S = \{2\}}$

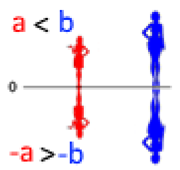
- $3x + 5 = 2x + 9$

$\Leftrightarrow 3x - 2x = 9 - 5$

$\Leftrightarrow x = 4$ $\boxed{S = \{4\}}$

Remarque : La propriété précédente s'applique aussi aux inéquations à une exception près :

Propriété 2 : Si on multiplie (ou divise) les deux membres d'une inéquation par un même nombre **strictement négatif**, on obtient une inéquation de signe **contraire**.



$2x < 1$

$\Leftrightarrow \frac{2x}{2} < \frac{1}{2}$ On divise par 2 qui est **positif**
L'inégalité reste dans le **même** sens.

$\Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$

$-2x < 6$

$\Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} > \frac{6}{-2}$ On divise par -2 qui est **négatif**
L'inégalité est dans le sens **contraire.**

$\Leftrightarrow x > -3$

Exemple 3 : Résoudre les inéquations suivantes :

- $2x - 5 \geq 0$

$\Leftrightarrow 2x \geq 5$

$\Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2} = 2.5$ $\boxed{S = [2.5; +\infty[}$

- $-4x + 6 < 0$

$\Leftrightarrow -4x \geq -6$

$\Leftrightarrow x \leq \frac{-6}{-4} = \frac{6}{4} = 1.5$ $\boxed{S =]-\infty; 1.5]}$

3 – Résolution graphique

A partir des courbes de fonctions, il est possible de résoudre graphiquement des équations.

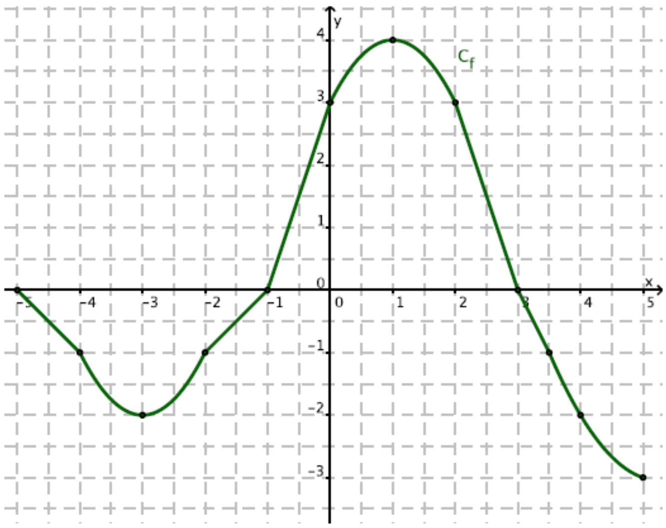
Graphiquement, on peut interpréter les symboles d'égalités/inégalités de la façon suivante :

- « $=$ » → « intersection »
- « > » → « au-dessus »
- « < » → « en dessous ».

a. Equation/Inéquation du type $f(x) = k,\ f(x) > k,\ f(x) < k.$

Méthode : On peut s'aider d'une droite horizontale passant par k pour lire les solutions

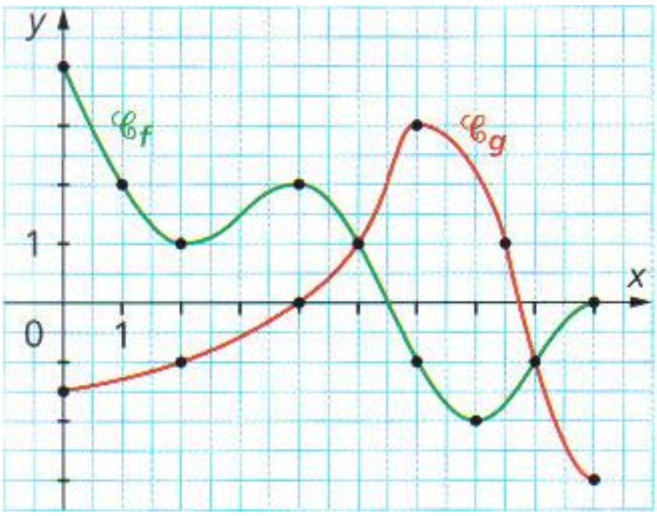
Exemple 4 : Soit f une fonction définie sur $[-5; 5]$ par la courbe ci-dessous. Résoudre graphiquement les équations/inéquations suivantes.



- $f(x) = 3$ $\quad S = \{0; 2\}$
- $f(x) = 5$ $\quad S = \emptyset$
- $f(x) \geq 3$ $\quad S = [0; 2]$
- $f(x) \leq -1$ $\quad S = [-4; -2] \cup [3.5; 5]$
- $f(x) < 0$ $\quad S = [-5; -1[\cup]3; 5]$
- $f(x) \leq -2$ $\quad S = \{-3\} \cup [4; 5]$
- $f(x) > -2$ $\quad S = [-5; -3[\cup]-3; 4[$

b. Equation/Inéquation du type $f(x) = g(x),\ f(x) > g(x),\ f(x) < g(x)$

Exemple 5 : Soit f et g deux fonctions définies sur $[0; 9]$ par les courbes ci-dessous. Résoudre graphiquement les équations/inéquations suivantes :



- $f(x) = g(x)$ $\quad S = \{5; 8\}$
- $f(x) \leq g(x)$ $\quad S = [5; 8]$
- $f(x) \geq g(x)$ $\quad S = [0; 5] \cup [8; 9]$
- $f(x) < g(x)$ $\quad S =]5; 8[$

Equations/Inéquations - Exercices

Résolution algébrique

1 (Equation 1)

Résoudre les équations suivantes :

a. $x + 2 = 0$
b. $5 - x = 0$
c. $2x - 6 = 0$
d. $3x + 5 = 0$
e. $10x - 8 = 4$
f. $\frac{1}{2}x + 1 = -1$

2 (Equation 2)

Résoudre les équations suivantes :

a. $\frac{2-3x}{5} = 2$
b. $4x - 4 = 2 - 5x$
c. $-\frac{2}{3}x - 5 = x + 1$
d. $11x - (x + 1) = x - 1$
e. $3x - (5x + 7) = 2x - 3$
f. $(x + 2)^2 - (x - 1)^2 = 0$

3 (Inéquation)

Résoudre les équations suivantes :

a. $3x + 9 > 0$
b. $2x - 3 \leq 5$
c. $-5x + 10 \leq 0$
d. $3 - 2x < 7$
e. $4x - 5 > 10 - 6x$
f. $2.5x + 3{,}7 \leq 1.8 + 4.2x$
g. $\frac{3-2x}{3} < 4$

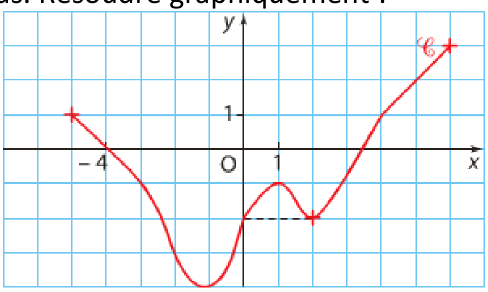
4 (Solution)

On considère l'équation (E): $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$. Vérifier que les trois premiers entiers naturels sont solutions de cette équation.

Résolution graphique

5 (Equation)

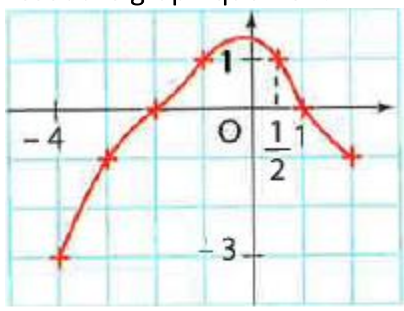
Soit f la fonction dont on a tracé la courbe ci-dessous. Résoudre graphiquement :



a. $f(x) = 3$
b. $f(x) = 1$
c. $f(x) = -1$
d. $f(x) = 5$

6 (Inéquation)

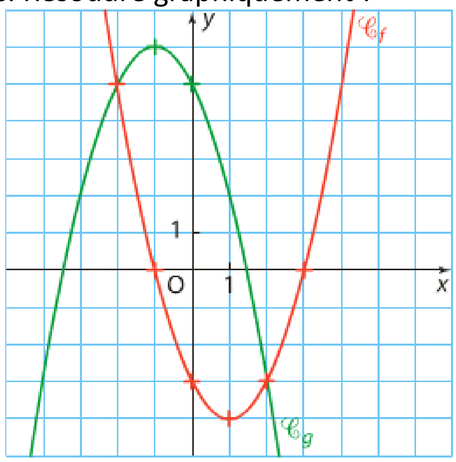
Soit f la fonction dont on a tracé la courbe ci-dessous. Résoudre graphiquement :



a. $f(x) \geq -1$
b. $f(x) > 0$
c. $f(x) \leq 1$
d. $-1 \leq f(x) \leq 0$

7 (Avec 2 courbes)

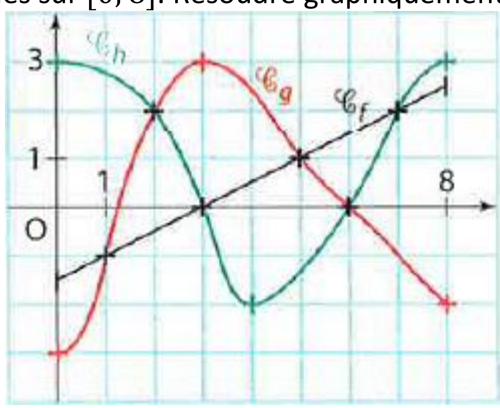
Soit f la fonction dont on a tracé la courbe ci-dessous. Résoudre graphiquement :



a. $f(x) \leq 0$
b. $g(x) < 2$
c. $f(x) = g(x)$
d. $f(x) < g(x)$
e. $f(x) \geq g(x)$
e. $f(x) > g(x)$

8 (Avec 3 courbes)

Dans ce repère C_f, C_g et C_h sont les courbes représentatives de trois fonctions f, g et h définies sur $[0; 8]$. Résoudre graphiquement :



a. $f(x) \leq g(x)$
b. $g(x) \leq h(x)$
c. $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$
d. $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$
e. $h(x) < g(x) < f(x)$
f. $f(x) \leq h(x) < g(x)$

Problèmes

9 (Taxi)

Un chauffeur de taxi affiche les tarifs suivants :

Prise en charge : 5 € *Prix au km : 1,5 €*

Quelle distance peut-on parcourir dans ce taxi avec un billet de 50 € ?

10 (Devinette)

Je pense à trois nombres entiers consécutifs. Leur somme vaut 106 667. Quels sont ces nombres ?

11 (Age)

Une mère a 30 ans et sa fille en a 4. Dans combien d'années l'âge de la mère sera-t-il le triple de celui de sa fille ?

12 (Moyenne)

Thomas a eu 11 et 16 lors des deux premiers DS de maths. Combien doit-il avoir au DS final pour avoir 15 de moyenne sachant que ce dernier devoir est coefficient 2 ?

13 (Carré)

Si on augmente de 5 m un côté d'un carré et si on diminue de 3 m l'autre côté, on obtient un rectangle de même aire que celle du carré. Combien mesure le côté de ce carré ?

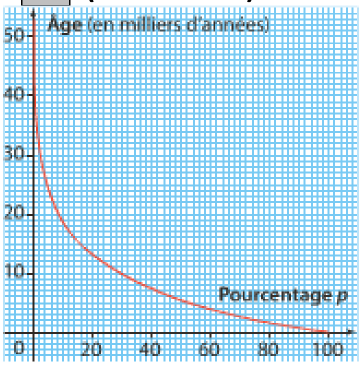
14 (Réservoir)

Le réservoir d'une automobile peut contenir $54\ L$ de carburant. La consommation de ce véhicule est de $7L/100km$. Quelle distance d (en km) peut-on parcourir avant d'utiliser la réserve de $5L$.

15 (Photocopie)

Une imprimerie propose les tarifs suivants : 0.05€/copie ou bien un abonnement de 10€ puis 0.02€/copie. A partir de combien de copies, il est intéressant de prendre l'abonnement ?

16 (Carbone 14)



Après la mort d'un organisme la quantité de carbone 14 qu'il contient diminue. Utiliser le graphique ci-contre pour déterminer le pourcentage p de carbone 14 dans un organisme mort datant :

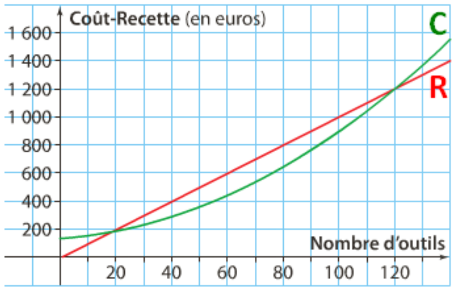
a. De 10 000 ans

b. De moins de 5000 ans.

c. De plus de 20 000 ans

17 (Recette, Coût, Bénéfice 1)

Une entreprise fabrique chaque jour x outils avec $x \in [0; 140]$. La recette et le coût total de production sont données par les courbes C et R tracées ci-dessous.



1) Quel est le prix de vente d'un outil ?

2) Déterminer le bénéfice réalisé pour 100 outils fabriqués par jour.

3) Pour quels valeurs de x l'entreprise est-elle :

a. Bénéficiaire b. Déficitaire

18 (Recette, Coût, Bénéfice 2)

Une entreprise fabrique des jouets en bois.

Pour x jouets fabriqués (avec $x \geq 0$) :

• Le coût de production en euros est donnée par :

$$C(x) = 0.002x^2 + 2x + 4000$$

• La recette en euros est donnée par :

$$R(x) = 11x$$

1) Quel est le prix de vente d'un jouet ?

2) Déterminer le bénéfice réalisé par l'entreprise si elle produit :

a. 200 jouets b. 1000 jouets

3) Montrer que le bénéfice en euros, pour x jouets fabriqués est donné par :

$$B(x) = -0.002x^2 + 9x - 4000$$

4) Tracer la courbe de la fonction B sur l'écran de la calculatrice (On prendra $0 \leq X \leq 5000$ et $-10000 \leq Y \leq 10000$ avec un pas de 1000).

5) En déduire l'intervalle de rentabilité, c'est-à-dire la quantité que doit produire l'entreprise pour réaliser du bénéfice.

19 (Calculatrice)

Utiliser la calculatrice pour résoudre les équations/inéquations suivantes

a. $x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$

b. $x^2 + 3x - 3 = 1$

c. $x^2 < x - 2$

d. $x^3 \geq 10x^2$