Chapitre F6 : Equations différentielles

1 – Généralités

Activité 1 : Dans les équations suivantes, l'inconnue y représente une fonction. Pour chacune d'entre-elles, retrouver parmi les fonctions proposées, celle(s) qui vérifie(nt) l'égalité.

	• $f(x) = \cos(x)$
$y' = y$ •	• $f(x) = \sin(x)$
$y'' = -y$ •	• $f(x) = e^x$
$y' = 2y$ •	• $f(x) = e^{-x}$
$y' + y = 0$ •	• $f(x) = e^{x+1}$
	• $f(x) = 2e^x$
	• $f(x) = e^{2x}$
	• $f(x) = \sin(x)$

Définition 1 : Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue y est une fonction, et dans laquelle apparait sa dérivée y', et éventuellement ses dérivées successives y'', y''', etc.

Vocabulaire :

- Une fonction qui vérifie une équation différentielle est une **solution** de l'équation différentielle.
- **Résoudre** une équation différentielle sur un intervalle I c'est trouver toutes les fonctions définies sur I qui sont solutions de l'équation différentielle.
- **L'ordre** d'une équation différentielle correspond à l'ordre de la dérivée la plus élevée dans l'équation.

Exemple 1 :

- L'équation $y' = y$ est une équation différentielle du premier ordre. La fonction exponentielle $f(x) = e^x$ est une solution de cette équation. La fonction $g(x) = e^{x+1}$ est aussi une solution de cette équation.
- L'équation $y'' = -y$ est une équation différentielle du second ordre (car il y a la dérivée seconde). Les fonctions trigonométriques $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \sin(x)$ sont des solutions de cette équation.

Remarque : La solution d'une équation différentielle n'est pas unique : Nous verrons dans la suite du chapitre que les deux équations précédentes possèdent en réalité une infinité de solutions.

Exemple 2 : On considère l'équation différentielle (E): $y' + 3y = 6$. Vérifier que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5e^{-3x} + 2$ est une solution de l'équation (E).

On commence par dériver f : $f'(x) = 5 \times (-3) \times e^{-3x} = -15e^{-3x}$

On a $f'(x) + 3f(x) = -15e^{-3x} + 3 \times (5e^{-3x} + 2) = -15e^{-3x} + 15e^{-3x} + 6 = 6$

Ainsi, on a bien $f' = 3f + 6$ et donc f est une solution de l'équation (E)

2 – Equations différentielles du premier ordre

Définition 2 : On appelle **équation linéaire du premier ordre** une équation différentielle de la forme $y' + ay = b$ où a et b sont des nombres réels non nuls tel que $a \neq 0$

Remarque : Lorsque $b = 0$, l'équation devient $y' + ay = 0$ et on dit que l'équation est **homogène.**

Exemple 3 : Les équations différentielles suivantes sont linéaires du premier ordre :

- $y' + 3y = 0$ est une équation homogène avec $a = 3$
- $y' = y$ est équivalente à $y' - y = 0$ et c'est donc une équation homogène avec $a = -1$
- $2y' = 5y$ est équivalente à $y' - \frac{5}{2}y = 0$ et c'est donc une équation homogène avec $a = -\frac{5}{2}$
- $y' + 3y = 6$ est une équation non homogène avec $a = 3$ et $b = 6$

Théorème 1 : Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sont les fonctions sont sous la forme : $f(x) = ke^{-ax} + \frac{b}{a}$ (avec k un nombre réel quelconque)

Explication : Pourquoi cette formule ?

- Considérons les fonctions de la forme $f(x) = ke^{-ax}$ (où k est un nombre réel)

Calculons $f'(x) + af(x) = -kae^{-ax} + ake^{-ax} = 0.$

Ainsi, quel que soit la valeur de k, f est solution de l'équation homogène $y' + ay = 0$

- Pour obtenir les solutions de l'équation $y' + ay = b$ on cherche d'abord une **solution particulière** :

Soit la fonction constante $g(x) = \frac{b}{a}$: On a $g'(x) + ag(x) = 0 + a \times \left(\frac{b}{a}\right) = 0 + b = b$

Donc g est une solution particulière de l'équation $y' + ay = b$

- La solution générale de l'équation différentielle $y' + ay = b$ s'obtient alors en additionnant la solution particulière à la solution de l'équation homogène, d'où la formule.

Remarque : Dans le cas homogène ($b = 0$) on retrouve les fonctions de la forme $f(x) = ke^{-ax}$.

Exemple 4 :

- Les solutions de l'équation $y' + 3y = 0$ sont les fonctions de la forme $f(x) = ke^{-3x}$
- Les solutions de l'équation $y' + 3y = 6$ sont les fonctions de la forme $f(x) = ke^{-3x} + \frac{6}{3} = ke^{-3x} + 2$

Théorème 2 : Soient deux réels x_0 et y_0. Il existe une **unique** solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' + ay = b$ vérifiant la condition initiale $f(x_0) = y_0$.

Exemple 5 : Déterminer la solution de l'équation $y' + 3y = 6$ vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$

On sait que les solutions sont les fonctions de la forme $f(x) = ke^{-3x} + 2$.

Or $f(0) = 1$ donc $ke^{-3\times 0} + 2 = 1$ donc $k + 2 = 1$ donc $k = -1$

Finalement, l'unique solution de cette équation vérifiant $f(0) = 1$ est la fonction $f(x) = -e^{-3x} + 2$.

3 – Equations différentielles du second ordre

Dans ce paragraphe, nous allons voir comment résoudre l'équation linéaire de second ordre :

$$y'' + \omega^2 y = 0 \text{ où } \omega \text{ est un nombre réel.}$$

Activité 1 : On considère la fonction $f(x) = \cos(\omega x) + \sin(\omega x)$ où ω est un nombre réel.

1) Calculer la dérivée seconde de la fonction f

On calcule d'abord la dérivée $f'(x) = -\omega \sin(\omega x) + \omega \cos(\omega x)$

Puis on dérive une deuxième fois : $f''(x) = -\omega^2 \cos(\omega x) - \omega^2 \sin(\omega x) = -\omega^2 [\cos(\omega x) + \sin(\omega x)]$

2) Que peut-on en déduire ?

On remarque que $f''(x) = -\omega^2 f(x)$ et donc que $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$

On peut donc en déduire que f est une solution de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$.

Le théorème suivant, nous donne toutes les solutions de cette équation différentielle.

Théorème 3 : Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions sont sous la forme : $f(x) = A.cos(\omega x) + B.\sin(\omega x)$ (où A et B sont des nombres réels quelconques)

Remarque : En utilisant les formules trigonométriques, il est possible de transformer l'écriture des solutions de cette équation sous la forme $f(x) = A.\cos(\omega x + \varphi)$ ou bien sous la forme $f(x) = B.\cos(\omega x + \varphi)$.

Exemple 6 : Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' + 9y = 0$

C'est une équation de la forme $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega = 3$.

Les solutions de cette équation sont les fonctions $f(x) = A.cos(3x) + B.\sin(3x)$ avec A et B des réels.

Théorème 4 : L'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ admet une unique solution f sur $\mathbb{R}$, vérifiant deux conditions initiales données.

Remarque : En général on a des conditions initiales du type $\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f(x_1) = y_1 \end{cases}$ ou bien $\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_1) = y_1 \end{cases}$

Exemple 7 : Déterminer la solution de l'équation $y'' + 9y = 0$ vérifiant les conditions initiales : $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$

On a $\begin{cases} A.cos(3 \times 0) + \cancel{B.\sin(3 \times 0)} = 1 \\ \cancel{A.cos\left(3 \times \frac{\pi}{2}\right)} + B.\sin(3 \times \frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} A = 1 & car \cos(0) = 1 \; et \sin(0) = 0 \\ B = 1 & car \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \; et \; \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$

L'unique solution est donc la fonction $f(x) = cos(3x) + \sin(3x)$

Exemple 8 : Déterminer la solution de l'équation $y'' + y = 0$ vérifiant les conditions initiales : $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$

C'est une équation de la forme $y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega = 1$.

Donc les solutions de l'équation sont les fonctions $f(x) = A.cos(x) + B.\sin(x)$ avec A et B des réels.

$f(0) = 1 \Rightarrow A.cos(0) + \cancel{B.\sin(0)} = 1 \Rightarrow A = 1$.

$f'(x) = -A.sin(x) + B.\cos(x)$ donc $f'(0) = 1 \Rightarrow \cancel{-A.sin(0)} + B.\cos 0) = 1 \Rightarrow B = 1$.

L'unique solution vérifiant les deux conditions initiales est la fonction $f(x) = cos(x) + \sin(x)$

Equations différentielles – Fiche d'exercices

Equation différentielle du premier ordre

Exercice 1 **(Solution ? Pas solution ?)**

Dans chacun des cas suivants, dire si la fonctions f proposée est solution ou non de l'équation différentielle (E) dans laquelle y est une fonction de la variable x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = xe^x$ et $(E) : y' - y = e^x$.
2. $f(x) = x^2 \cos x$ et $(E) : 2y - xy' = x^3 \sin x$

Exercice 2 **(Équation du type $y' + ay = 0$)**

Résoudre les équations différentielles suivantes dans lesquelles y est une fonction de la variable x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. $y' + 2y = 0$
2. $y' - 3y = 0$
3. $y' = 5y$
4. $y' = -4y$
5. $2y' = 3y$
6. $-7y' + 2y = 0$

Exercice 3 **(Équation du type $y' + ay = b$)**

Résoudre les équations différentielles suivantes dans lesquelles y est une fonction de la variable x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. $y' + y = 4$
2. $y' - 4y = 2$
3. $y' = 3y + 2$
4. $y' = -4y - 5$
5. $3y' + 2y + 3 = 0$
6. $7y' - 2y - \sqrt{2} = 0$

Exercice 4 **(Équation du type $y' + ay = b$ avec condition initiale)**

Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) dans laquelle y est une fonction de la variable x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition initiale $f(x_0) = y_0$.

1. $(E) : y' + y = 4$ avec $f(0) = 2$
2. $(E) : y' - 3y + 2 = 0$; $f(\ln 2) = 3$
3. $(E) : y' = 3y + 2$ avec $f(1) = e$
4. $(E) : 2y' = 4y - 3$ avec $f(0) = 7$

Exercice 5 **(Exercice de bac STI2D : Polynésie, 2014)**

On considère l'équation différentielle $y' - 3y = 2$, où y désigne une fonction dérivable sur l'ensemble des réels. Une solution f de cette équation est la fonction de la variable x vérifiant pour tout réel x :

a. $f(x) = 2e^{-3x}$ **b.** $f(x) = e^{3x} + \dfrac{2}{3}$ **c.** $f(x) = e^{\frac{2}{3}x}$ **d.** $f(x) = e^{3x} - \dfrac{2}{3}$

Equation différentielle du second ordre

Exercice 6 **(Équation du type $y'' + \omega y = 0$)**

Résoudre les équations différentielles suivantes dans lesquelles y est une fonction de la variable t définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

1. $y'' + 16y = 0$
2. $25y'' + y = 0$
3. $4y'' = -25y$
4. $169y + 4y'' = 0$

Exercice 7 **(Équations du type $y'' + \omega y = 0$ avec conditions initiales)**

1. Résoudre l'équation différentielle $9y'' + y = 0$.
2. Déterminer la solution particulière f vérifiant les deux conditions $f(0) = -\sqrt{3}$ et $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 1$.
3. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{5\pi}{6}\right)$.

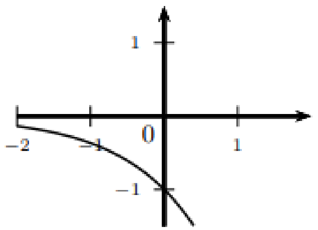
Exercice 8 **(Équations du type $y'' + \omega y = 0$ avec conditions initiales)**

1. Résoudre l'équation différentielle $4y'' + 9y = 0$.
2. Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) vérifiant $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ et $f'(\pi) = 0$.

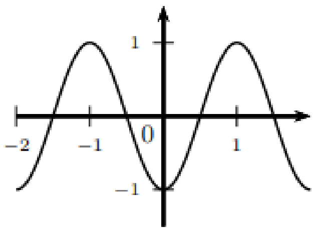
Exercice 9

La solution f de l'équation différentielle $y'' + 4\pi^2 y = 0$ qui vérifie $f(0) = -1$ et $f'(0) = 0$ admet comme représentation graphique :

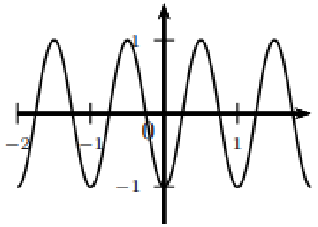
a.



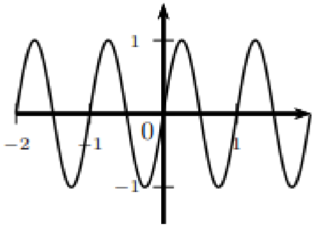
b.



c.



d.



Ex 10 QCM 1 (Tiré de divers sujet bac)

1. On considère l'équation différentielle $y' + 2y = 5$, où y désigne une fonction de la variable réelle x dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée notée y'. Une solution de cette équation est :

a. $x \longmapsto \frac{5-e^{-2x}}{2}$	**b.** $x \longmapsto e^{-2x} - 5$
c. $x \longmapsto \frac{e^{2x}-5}{2}$	**d.** $x \longmapsto e^{2x} + 2{,}5$

2. On considère l'équation différentielle $y' + 5y = 3$, où y désigne une fonction dérivable sur l'ensemble des réels. La solution f de cette équation telle que $f(0) = 0$ est la fonction de la variable x vérifiant pour tout réel x :

a. $f(x) = +0{,}6e^{5x} + 0{,}6$
b. $f(x) = -0{,}6e^{-5x} + 0{,}6$
c. $f(x) = 0$
d. $f(x) = -3e^{-5x} + 3$

3. On considère l'équation différentielle $y' + 2y = 6$ où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$. On note f l'unique solution de cette équation différentielle vérifiant $f(0) = 5$.

La valeur de $f(2)$ est :

a. $2e^{-4} + 3$
b. $2e^{4} + 3$
c. $5e^{-4} + 3$
d. $5e^{4} + 3$

Ex 11 QCM 2 (Tiré de divers sujet bac)

1. Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \frac{1}{3}y = 0$ sont de la forme :

a. $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{3}}t^2$
b. $t \mapsto A\cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}t\right) + B\sin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}t\right)$
c. $t \mapsto Ae^{-\sqrt{3}t}$
d. $t \mapsto -\frac{1}{3}$

2. Une solution g de l'équation différentielle $y'' + 9y = 0$ vérifiant $g(0) = 1$ est définie sur $\mathbf{R}$ par :

a. $g(t) = \cos(9t) + \sin(9t)$
b. $g(t) = 4\cos(3t) - 3$
c. $g(t) = \cos(3t) + \sin(3t)$
d. $g(t) = 2\cos(3t) - \sin(3t)$

3. f est définie par : $f(t) = 3\cos\left(5t - \frac{\pi}{2}\right)$ est solution de

a. $y' + 3y = 0$ **b.** $y'' + 25y = 0$ **c.** $y'' - 5y = 0$

4. L'équation différentielle $y'' + 4y = 0$ admet pour solution la fonction f définie, pour tout réel x, par :

a. $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **b.** $f(x) = 5\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$
c. $f(x) = 4\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ **d.** $f(x) = \sin\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)$

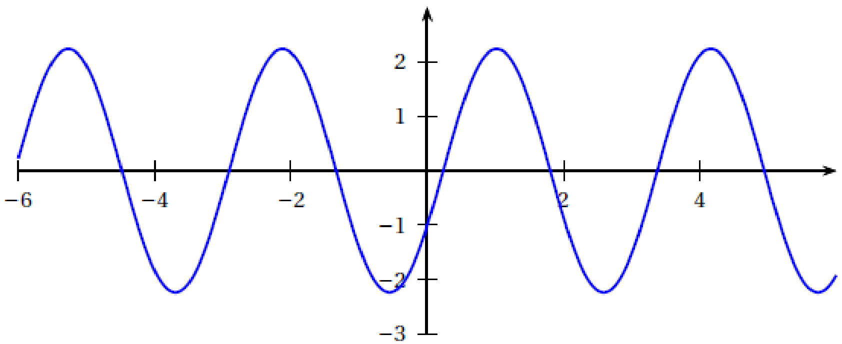
5. Une solution f de l'équation différentielle $3y'' + 12y = 0$ est la fonction définie pour tout réel t par :

a. $f(t) = \sin(4t)$
b. $f(t) = \sin(2t)$
c. $f(t) = 2\sin(3t)$
d. « Aucune des réponses **a.-b.-c.** ».

Ex 12 Affirmation (Tiré de divers sujet bac)

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier votre réponse.

Affirmation 2 : La solution f de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$ qui vérifie $f(0) = -1$ et $f'(0) = 2$ admet comme représentation graphique :



Ex 13 Résistance Béton (Tiré du bac Antilles-Guyane 2018)

Le béton est un matériau de construction fabriqué à partir d'un mélange de ciment, de granulats et d'eau.

Selon l'usage prévu (dalle, poutre, fondation …), on utilise des bétons de compositions différentes.

Dans cet exercice, on s'intéresse au béton adapté à la construction d'une dalle et on étudie la résistance à la compression, exprimée en MPa (mégapascal), en fonction de la durée t de séchage, exprimée en jour.

On admet que cette résistance peut être modélisée par une fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, qui est une solution sur $[0\,;+\infty[$ de l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0{,}15y = 4{,}5.$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E) sur $[0\,;+\infty[$.

2. À l'instant $t = 0$, la résistance à la compression de ce béton est nulle.
   Montrer alors que f est définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = -30\mathrm{e}^{-0{,}15t} + 30$.

3. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Il est possible de marcher sur ce type de béton lorsque sa résistance à la compression est supérieure à 12 MPa.

   Après combien de jours complets de séchage est-il possible de marcher sur ce type de béton ?

Ex 14 Fonte GS (Tiré du bac Métropole 2017)

La fonte GS (graphite sphéroïdal) possède des caractéristiques mécaniques élevées et proches de celles des aciers. Une entreprise fabrique des pièces de fonte GS qui sont utilisées dans l'industrie automobile.

Ces pièces sont coulées dans des moules de sable et ont une température de 1 400 °C à la sortie du four. Elles sont entreposées dans un local dont la température ambiante est maintenue à une température de 30 °C. Ces pièces peuvent être démoulées dès lors que leur température est inférieure à 650 °C.

La température en degrés Celsius d'une pièce de fonte est une fonction du temps t, exprimé en heures, depuis sa sortie du four. On admet que cette fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, est une solution sur cet intervalle de l'équation différentielle $y' + 0{,}065y = 1{,}95$.

1. **a.** Résoudre sur $[0\,;\,+\infty[$ l'équation différentielle $y' + 0{,}065y = 1{,}95$.

   b. Donner $f(0)$ et vérifier que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = 1370\mathrm{e}^{-0{,}065t} + 30$.

2. **a.** Étudier mathématiquement le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

   b. Pourquoi ce résultat était-il prévisible ?

3. La pièce de fonte peut-elle être démoulée après avoir été entreposée 5 heures dans le local ?

4. **a.** Déterminer au bout de combien de temps au minimum la pièce pourra être démoulée. Arrondir le résultat à la minute près.

   b. Pour éviter la fragilisation de la fonte, il est préférable de ne pas démouler la pièce avant que sa température ait atteint 325 °C.
   Dans ce cas, faudra-t-il attendre exactement deux fois plus de temps que pour un démoulage à 650 °C ? Justifier la réponse.

Ex 15 Pression atmosphérique (Tiré du bac Antilles-Guyane 2017)

En 1648, Blaise Pascal a demandé à son beau-frère Florin Périer de mesurer la hauteur de mercure dans deux baromètres, l'un situé à Clermont-Ferrand et l'autre en haut de la montagne la plus proche, le Puy-de-Dôme.
Florin Périer a constaté que la hauteur de mercure dans le baromètre situé en haut du Puy-de-Dôme était inférieure à la hauteur de mercure dans le baromètre situé plus bas, à Clermont-Ferrand.
Cette expérience a permis de montrer que la pression atmosphérique diminue lorsque l'altitude augmente.

Dans cet exercice, la pression atmosphérique est exprimée en hectopascal (hPa).
On rappelle que la pression atmosphérique vaut 1 013,25 hPa au niveau de la mer.

Partie A : *Une règle simplifiée*

Pour évaluer la pression atmosphérique, les alpinistes utilisent la règle simplifiée suivante : « la pression atmosphérique diminue de 0,11 hectopascal quand l'altitude augmente de 1 mètre ».

1. Recopier et compléter le tableau suivant en utilisant cette règle :

altitude (en mètre)	0	800	1500	2000
pression atmosphérique (en hPa)	1013,25			

2. Pour tout entier naturel n, on note u_n la pression atmosphérique en hPa à l'altitude de n mètres calculée avec la règle simplifiée.
Ainsi u_0=1 013,25.

a. Calculer u_1 et u_2.

b. Justifier que la suite (u_n) n'est pas géométrique.

c. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 - 0{,}11n$.
En déduire l'altitude, exprimée en mètre, à partir de laquelle la pression atmosphérique est inférieure à 950 hPa.

Partie B : *La formule barométrique*

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' + 0{,}12\, y = 0$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' est la fonction dérivée de y.

Pour de faibles valeurs de l'altitude, les scientifiques ont démontré que la fonction f qui, à l'altitude x **en kilomètre**, associe la pression atmosphérique en hectopascal est la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie $f(0) = 1\,013{,}25$.

1. a. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).

b. Démontrer que la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1\,013{,}25$ est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 1\,013{,}25\, e^{-0{,}12\,x}$$

2. En utilisant la fonction f :

a. Calculer une valeur approchée à 0,01 près de la pression atmosphérique à 150 mètres d'altitude.

b. Calculer l'altitude, arrondie au mètre, correspondant à une pression atmosphérique de 900 hPa.

3. On pose $v_n = f(n)$, pour tout entier naturel n. Justifier qu'avec ce modèle, la suite (v_n) est géométrique.

Partie C : *La formule du nivellement barométrique*

La formule de la partie B ne tient pas compte des changements de température et ne peut donc être utilisée que pour de faibles altitudes.
Pour des altitudes plus élevées, on utilise la fonction p qui à l'altitude x **en kilomètre** associe la pression atmosphérique en hPa :

$$p(x) = 1013{,}25\left(1 - \frac{6{,}5\,x}{288{,}15}\right)^{5{,}255}$$

1. Calculer la pression atmosphérique (en hPa, arrondie à l'unité) au sommet de l'Everest dont l'altitude est 8 848 mètres.

2. Recopier et compléter l'algorithme suivant en utilisant la fonction p, de façon à ce qu'il affiche en sortie l'altitude (estimée à 100 mètres près) à partir de laquelle la pression atmosphérique est inférieure à 400 hPa.

```
Variables
A un nombre réel
P un nombre réel
Début
A prend la valeur 0
P prend la valeur 1 013,25
Tant que ..... faire
        | A prend la valeur A+0,1
        | P prend la valeur .....
Fin tant que
Afficher ...
Fin
```

Ex 16 Simulateur Cardiaque (Tiré du bac Métropole Septembre 2017)

Le stimulateur cardiaque est un appareil destiné à certains patients dont le rythme du cœur est devenu trop lent. Implanté sous la peau, l'appareil envoie des impulsions électriques régulières au cœur lorsque le rythme cardiaque est insuffisant.
Un stimulateur cardiaque est constitué de deux composants :

- un condensateur de capacité C égale à 4×10^{-7} farad ;
- un conducteur ohmique de résistance R égale à 2×10^{6} ohms.

Une fois le condensateur chargé, la tension à ses bornes est égale à 5,6 volts. Il se décharge ensuite dans le conducteur ohmique.

Partie A

La tension u, en volts, aux bornes du condensateur est une fonction du temps t, en secondes.
On admet que $u(0) = 5,6$ et que cette fonction u, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, vérifie pour tout nombre t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ la relation :

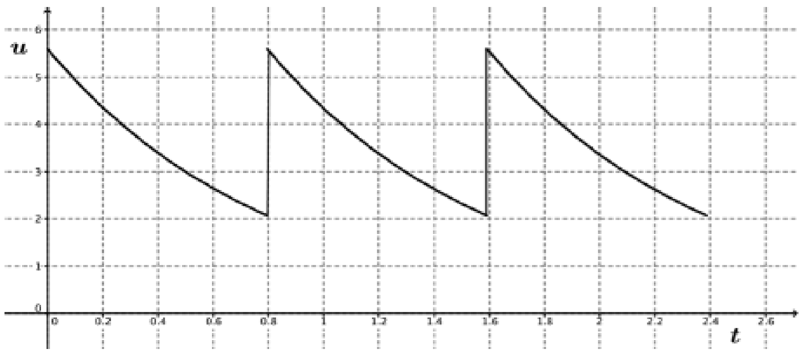
$$u'(t) + \frac{1}{RC} \times u(t) = 0,$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

1. **a.** Vérifier que la fonction u est solution sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ de l'équation différentielle $y' + 1,25y = 0$.
   b. Résoudre l'équation différentielle $y' + 1,25y = 0$.
   c. Montrer que, pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on a : $u(t) = 5,6\mathrm{e}^{-1,25t}$.
2. **a.** Étudier mathématiquement le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   b. Ce résultat était-il prévisible ? Justifier la réponse.

Partie B

En réalité, lorsque la tension u aux bornes du condensateur a perdu 63% de sa valeur initiale $u(0)$, le stimulateur cardiaque envoie une impulsion électrique au cœur, ce qui provoque un battement. On considère que le condensateur se recharge instantanément et que la tension mesurée à ses bornes est à nouveau égale à 5,6 volts.



1. **a.** Vérifier que la tension aux bornes du condensateur qui déclenche l'envoi d'une impulsion électrique au cœur est de 2,072 volts.
   b. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ l'équation :
   $$5,6\mathrm{e}^{-1,25t} = 2,072.$$
   c. Interpréter le résultat trouvé.
2. Chez l'adulte en bonne santé, le pouls au repos se situe entre 50 et 80 pulsations par minute.
   On admet que le stimulateur cardiaque d'un patient souffrant d'insuffisance envoie une impulsion électrique au cœur toutes les 0,8 secondes.
   Ce rythme correspond-il à celui d'un adulte au repos et en bonne santé ? Justifier la réponse.

Ex 17 Macarons (Tiré du bac Nouvelle Calédonie 2017)

Marie a invité quelques amis pour le thé. Elle souhaite leur proposer ses macarons maison.
Elle les sort de son congélateur à -18 °C et les place dans une pièce à 20 °C.
Au bout de 15 minutes, la température des macarons est de 1 °C.

Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante : chaque minute la hausse de température des macarons est la même.
Estimer dans ce cadre la température au bout de 30 minutes, puis au bout de 45 minutes.
Cette modélisation est-elle pertinente ?

Deuxième modèle

On suppose maintenant que la vitesse de décongélation est proportionnelle à la différence de température entre les macarons et l'air ambiant (il s'agit de la loi de Newton).
On désigne par θ la température des macarons à l'instant t, et par θ' la vitesse de décongélation.
L'unité de temps est la minute et l'unité de température le degré Celsius.

On négligera la diminution de température de la pièce et on admettra donc qu'il existe un nombre réel a tel que, pour t positif :

$$\theta'(t) = a[\theta(t) - 20] \quad (E)$$

1. Vérifier que l'équation (E) s'écrit également : $\theta' - a\theta = -20a$.
   Donner alors, en fonction de a, l'ensemble des solutions de (E).

On rappelle que la température des macarons à l'instant $t = 0$ est égale à -18 °C et que, au bout de 15 min, elle est de 1 °C.

2. Montrer que pour t positif : $\theta(t) = 20 - 38\mathrm{e}^{-\frac{t\ln 2}{15}}$.
3. La température idéale de dégustation des macarons étant de 15 °C, Marie estime que celle-ci sera atteinte au bout de 30 min. A-t-elle raison ? Justifier la réponse.
   Sinon, combien de temps faudra-t-il attendre ?

Ex 18 Note de musique (Tiré du bac Polynésie 2017)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Une note de musique est émise en pinçant la corde d'une guitare électrique.

La puissance du son émis, initialement de 100 Watts, diminue avec le temps t, mesuré en seconde.

On modélise par $f(t)$ la puissance du son émis, exprimée en Watt, t secondes après le pincement de la corde.

Partie A

On considère l'équation différentielle (E) suivante où y est une fonction de la variable t définie et dérivable sur l'intervalle $[0,+\infty[$ et où y' est la fonction dérivée de y:

$$(\text{E}) : 25y' + 3y = 0$$

1. Résoudre l'équation différentielle $25y' + 3y = 0$.

2. Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la $f(0) = 100$.

3. Quelle est la puissance du son deux secondes après le pincement de la corde ? *Arrondir au Watt près.*

Pour la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$f(t) = 100\mathrm{e}^{-0,12t}$$

Partie B

On s'intéresse à l'instant à partir duquel la puissance du son émis après le pincement de la corde sera inférieure à 80 Watts.

On considère l'algorithme suivant :

```
Initialisation
a prend la valeur 0
b prend la valeur 5
Traitement
Tant que |b − a| > 0,2
    m prend la valeur (a+b)/2
        Si f(m) > 80
            a prend la valeur m
        Sinon
            b prend la valeur m
        Finsi
Fintantque
Sortie
Afficher a , b
```

1. À l'aide de l'algorithme ci-dessus, compléter le tableau donné en Annexe située page 7/7 et à rendre avec la copie.

2. Quelles sont les valeurs affichées en sortie de cet algorithme ?

3. Dans le contexte de cet exercice, que représentent ces valeurs ?

a	0	0				
b	5	2,5				
$b-a$	5					
$\lvert b-a\rvert > 0,2$	Vrai					
m	2,5					
$f(m)$	74,1					
$f(m) > 80$	Faux					

Partie C

1. Résoudre par le calcul l'équation $f(t) = 80$, *on donnera la valeur exacte et la valeur approchée à* 10^{-3} *près.*

Interpréter ce résultat.

2. Calculer et interpréter la limite de f lorsque t tend vers $+\infty$.