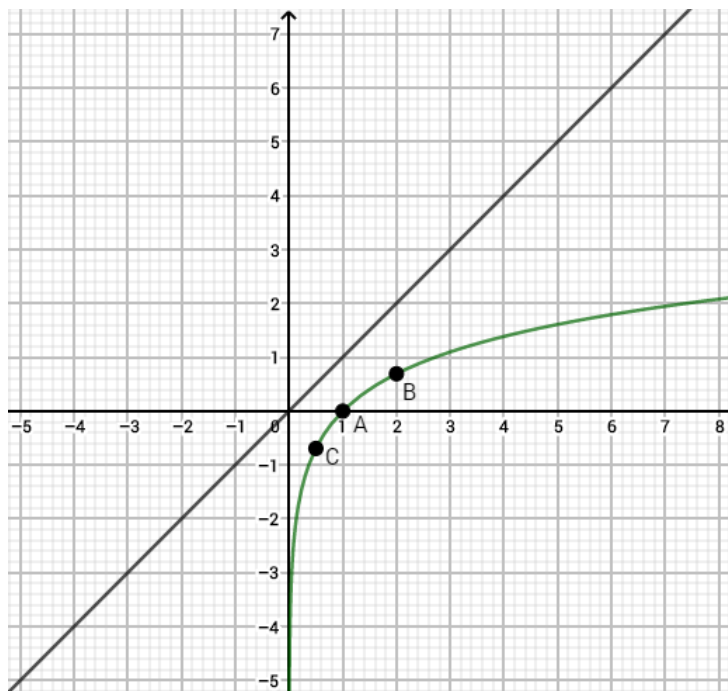


Chapitre F4 : Exponentielles

Activité 1 : Construction de la fonction exponentielle

On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction $f(x) = \ln(x)$ définie sur $]0; +\infty[$ ainsi que la droite d'équation $y = x$. Les tableaux de valeurs seront utilisés dans les questions 5 et 6.

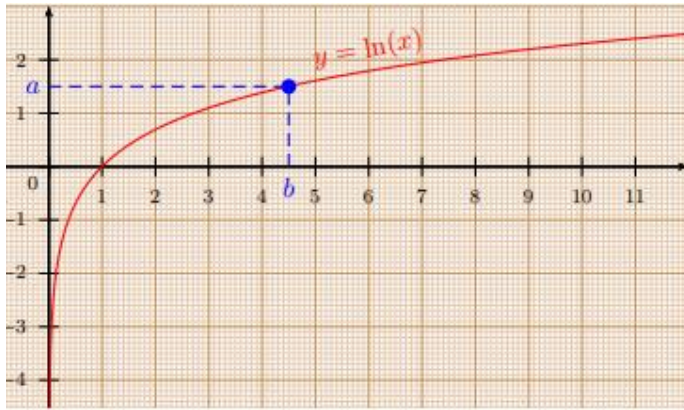


x	ln(x)	x	exp(x)
0,00674	-5	-10	4,5E-05
0,04979	-4	-5	0,00674
0,1	-2,30259	-4	
0,36788	-1	-3	0,04979
0,5	-0,69315	-2	0,13534
1	0	-1	0,36788
2	0,69315	0	1
2,71828	1	1	2,71828
3	1,09861	2	
4	1,38629	3	20,0855
5	1,60944	4	54,5982
6	1,79176	5	148,413
7	1,94591	6	403,429
7,38906	2	7	1096,63
8	2,07944	8	2980,96
9	2,19722	9	8103,08
10	2,30259	10	
148,413	5	20	4,9E+08
22026,5	10	100	2,7E+43

- 1) Déterminer la valeur exacte des points A , B et C de la courbe de f d'abscisses respectives 1, 2 et 0.5
- 2) a. Placer les points D , E et F de la courbe de f d'ordonnées respectives 1, 2 et -2 .
b. Déterminer alors une valeur exacte de l'abscisse de ces points.
- 3) Construire la courbe symétrique de celle de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.
On admet que cette courbe est celle d'une nouvelle fonction g que l'on appelle « fonction exponentielle » et que l'on note $g(x) = \exp(x)$
- 4) Conjecturer l'ensemble de définition, le sens de variation, le signe et les limites de la fonction exponentielle.
- 5) a. A l'aide du nombre d'Euler e , donner une valeur exacte de $\exp(0)$, $\exp(1)$, $\exp(2)$ et $\exp(-1)$
Le nombre $\exp(x)$ est noté e^x . La fonction exponentielle s'écrit donc $g(x) = e^x$
b. A l'aide de la courbe, vérifier les égalités $g(f(x)) = x$ et $f(g(x)) = x$.
*On dit que la fonction exponentielle est la **fonction réciproque** de la fonction logarithme népérien*
c. On a donné en préambule le tableau de valeur de la fonction logarithme népérien et celui de la fonction exponentielle. Compléter les valeurs manquantes : $\exp(-4)$, $\exp(2)$ et $\exp(10)$
- 6) a. En utilisant différentes valeurs de x et y , comparer $\exp(x + y)$ et $\exp(x) \times \exp(y)$
b. Même question avec $\exp(x - y)$ et $\frac{\exp(x)}{\exp(y)}$
c. Utiliser le tableau pour donner une valeur approchée de $\exp(15)$, $\exp(-8)$ et $\exp(80)$



1 – Exponentielle d'un nombre



La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et elle prend ses valeurs dans $] - \infty; +\infty[$.

Tout nombre réel a possède donc un unique antécédent b par la fonction logarithme népérien :

Il existe un unique nombre b tel que $\ln(b) = a$

b est appelé **exponentielle** de a et noté $\exp(a)$.

Définition 1 : On appelle **exponentielle** du réel a , l'unique nombre b noté $\exp(a)$ tel que $\ln(b) = a$:

$$b = \exp(a) \Leftrightarrow \ln(b) = a$$

Notation : On note e^a le nombre $\exp(a)$.

Calculatrice : Pour calculer la valeur d'une exponentielle on utilise la touche exp de la calculatrice

• $e^{-10} \cong 0.00004$

• $e^{10} \cong 22026$

• $e^{100} \cong 2.7 \times 10^{43}$

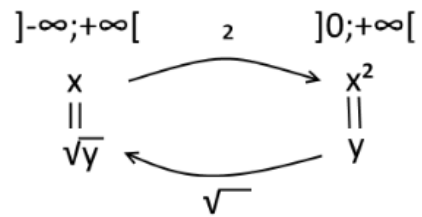
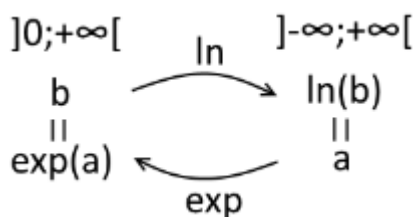
Remarque :

• $e^0 = \exp(0) = 1$ car $\ln(1) = 0$ et $e^1 = \exp(1) = e \cong 2.718$ (*Nombre d'Euler*) car $\ln(e) = 1$.

• Pour tout nombre a , $e^a > 0$ car la fonction logarithme népérien est définie sur $]0; +\infty[$.

• Les opérations \exp et \ln sont **réciproques** l'une de l'autre (comme par exemple les opérations 2 et $\sqrt{\quad}$)

Pour tout nombre réel a , $\ln(e^a) = a$ et pour tout nombre réel positif $b > 0$, $e^{\ln(b)} = b$



Exemple 1 :

• $\ln(x) = 3 \Leftrightarrow x = \exp(3) = e^3 \cong 20$

• $\ln(x) = -5 \Leftrightarrow x = \exp(-5) = e^{-5} \cong 0.00674$

• $\exp(x) = 10 \Leftrightarrow x = \ln(10) \cong 2.30$

• $e^x = -5 \Leftrightarrow$ Impossible : $\ln(-5)$ n'existe pas.

Exemple 2 : Résoudre les équations suivantes :

• $-3e^x + 6 = 0 \Leftrightarrow -3e^x = -6 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2 \cong 0.69$

• $4 \ln(x) = -1 \Leftrightarrow \ln(x) = -\frac{1}{4} = -0.25 \Leftrightarrow x = \exp\left(-\frac{1}{4}\right) = e^{-0.25} \cong -0.67$

• $\ln(2x + 5) = 4 \Leftrightarrow 2x + 5 = e^4 \Leftrightarrow 2x = e^4 - 5 \Leftrightarrow x = \frac{e^4 - 5}{2} \cong 2.94$

• $2e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2e^x = -1 \Leftrightarrow e^x = -0.5 \Leftrightarrow$ Impossible

• $e^{3x+10} = e^{2-x} \Leftrightarrow \ln(e^{3x+10}) = \ln(e^{2-x}) \Leftrightarrow 3x + 10 = 2 - x \Leftrightarrow 4x = -8 \Leftrightarrow x = -2$



2 – Propriétés algébriques

Propriété 1 (Relation fonctionnelle) : Pour tous nombres réels a et b , on a la relation suivante :

$$\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$$

Remarque : Cette relation fonctionnelle justifie la notation e^x sous forme de puissance : $e^{a+b} = e^a \times e^b$

Démonstration : Soient a et b deux nombres réels.

- On a d'une part : $a + b = \ln(\exp(a + b))$
- On a d'autre part : $a + b = \ln(\exp(a)) + \ln(\exp(b)) = \ln(\exp(a) \times \exp(b))$
- Les deux égalités précédentes donnent $\ln(\exp(a + b)) = \ln(\exp(a) \times \exp(b))$
- On en déduit donc que $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$

Exemple 3 : Simplifier les expressions suivantes :

- $e^2 e^3 = e^5$
- $e^{\ln(x)+5} = e^{\ln(x)} e^5 = x e^5$
- $e^{x+\ln(2)+3} = e^x e^{\ln(2)} e^3 = 2e^3 e^x$
- $e^x(e + e^2) = e^x e + e^x e^2 = e^{x+1} e^{x+2}$
- $e^{-x} e^{x+\ln(x)} = e^{-x+x+\ln(x)} = e^{\ln(x)} = x$

Propriété 2 : Pour tous nombres a et b et pour tout entier naturel n , on a les relations suivantes :

(1) $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$ avec la nouvelle notation $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$

(2) $\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$ avec la nouvelle notation $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

(3) $\exp(n \times a) = \exp(a)^n$ avec la nouvelle notation $e^{na} = (e^a)^n$

Démonstration : Soient a et b deux nombres réels et n un entier naturel.

(1) On a $\exp(a + (-a)) = \exp(0) = 1$ d'où $\exp(a) \times \exp(-a) = 1$ c'est-à-dire $\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}$

(2) On a $\exp(a - b) = \exp(a + (-b)) = \exp(a) \times \exp(-b) = \exp(a) \times \frac{1}{\exp(b)} = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$

(3) $\exp(n \times a) = \exp\left(\underbrace{a + \dots + a}_{n\text{-fois}}\right) = \underbrace{\exp(a) \times \dots \times \exp(a)}_{n\text{-fois}} = \exp(a)^n$

Exemple 4 : Simplifier les expressions suivantes :

- $e^{x-\ln(3)} = \frac{e^x}{e^{\ln(3)}} = \frac{e^x}{3}$

- $\frac{2}{e^{\ln(3)-x}} = 2 \times \frac{1}{e^{\ln(3)-x}} = 2e^{x-\ln(3)} = 2 \frac{e^x}{e^{\ln(3)}} = \frac{2e^x}{3} = \frac{e^x}{1.5}$

- $\frac{e^6 e^7}{e^8} = \frac{e^{6+7}}{e^8} = e^{13-8} = e^5$

- $\frac{e^x}{(e^{-0.5x})^2} = \frac{e^x}{e^{2 \times (-0.5)x}} = \frac{e^x}{e^{-x}} = e^{x-(-x)} = e^{2x}$

- $e^{-2x} e^{3x} \frac{1}{(e^{-2x})^3} = e^{-2x+3x} \frac{1}{e^{3 \times (-2x)}} = e^x \times \frac{1}{e^{-6x}} = e^x \times e^{6x} = e^{x+6x} = e^{7x}$



3 – La fonction exponentielle

Propriété 3 : La fonction exponentielle $f(x) = \exp(x) = e^x$ est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , on a :

$$f'(x) = \exp(x)$$

Remarque :

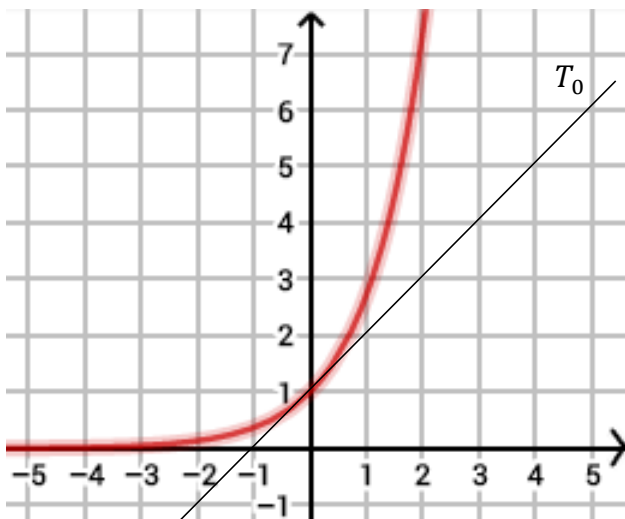
- La fonction exponentielle est en fait **l'unique** fonction vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$ (admis)
- Comme $f'(x) = \exp(x) > 0$, la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R}

Démonstration : En dérivant la relation $\ln(\exp(x)) = x$, on obtient $\frac{\exp'(x)}{\exp(x)} = 1$ d'où $\exp'(x) = \exp(x)$.

Tableau de valeurs : A l'aide de la calculatrice on peut compléter le tableau suivant :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\exp(x)$	0.007	0.018	0.05	0.135	0.368	1	2.718	7.389	20.08	54.6	148.4

Courbe représentative :



Limites :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$ (très vite : $e^{100} \approx 10^{45}$)

Asymptotes :

- Verticale : Aucune (Pas de valeur interdite)
- Horizontale : $y = 0$ (En $-\infty$)

Tangente : Equation de T_0

$$y = \exp'(0)(x - 0) + \exp(0) \quad \left| \begin{array}{l} \exp'(0) = \exp(0) = 1 \\ \exp(0) = 1 \end{array} \right.$$

$$y = x + 1$$

Tableau de signe : Pour tout x , $\exp(x) > 0$

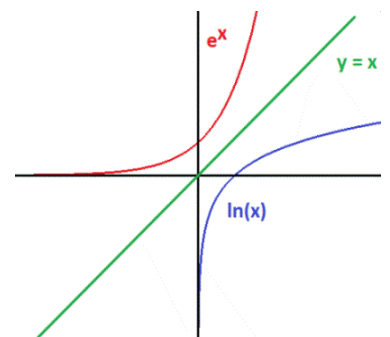
x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp(x)$	+	

Tableau de variation : $\exp'(x) = \exp(x) > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp'(x)$	+	
$\exp(x)$	0 \nearrow $+\infty$	

Courbe :

Les courbes de la fonction exponentielle et de la fonction logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$



Exemple 5 : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x + 3)e^x$. Calculer la dérivée f' de f

$$f = u \times v \text{ avec } \begin{cases} u = x + 3 \\ u' = 1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v = e^x \\ v' = e^x \end{cases} \text{ donc } f' = u'v + v'u \text{ d'où } f'(x) = e^x + e^x(x + 3) = e^x(x + 4)$$

Exemple 6 : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (e^x - 3)(1 - e^x)$. Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$: Si $x \rightarrow +\infty$ alors $(e^x - 3) \rightarrow +\infty$ et $(1 - e^x) \rightarrow -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \times (-\infty) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$: Si $x \rightarrow -\infty$ alors $(e^x - 3) \rightarrow -3$ et $(1 - e^x) \rightarrow 1$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = (-3) \times 1 = -3$



4 – Fonction de la forme $\exp(u)$

On considère une fonction u , définie et dérivable sur un intervalle I

On s'intéresse dans ce paragraphe aux fonctions de la forme $f(x) = \exp(u(x))$

Propriété 4 : La fonction $\exp u$ est dérivable sur I et on a $\exp' u = u' \exp u$

Exemple 7 : On considère la fonction $f(x) = e^{x^2+3x-1}$ Calculer la dérivée f' de f .

$f = \exp u$ avec $u = x^2 + 3x - 1$ et $u'(x) = 2x + 3$. Donc $f' = u' \exp u$ d'où $f'(x) = (2x + 3)e^{x^2+3x-1}$.

Propriété 5 : Pour déterminer les limites de la fonction $\exp u$ on utilise les deux règles suivantes :

(1) « $\exp(-\infty) = 0$ »

(2) « $\exp(+\infty) = +\infty$ »

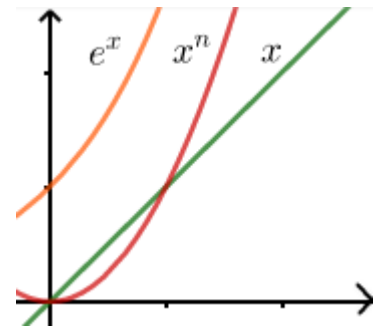
Exemple 8 : On considère la fonction la fonction $f(x) = e^{2x+5}$ Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 5 = -\infty$ et « $\exp(-\infty) = 0$ » donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 5 = +\infty$ et « $\exp(+\infty) = +\infty$ » donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

5 – Croissances comparées

Lorsque x tend vers $+\infty$ les fonctions $x \mapsto \exp(x)$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^n$ tendent vers $+\infty$ mais à des vitesses différentes : La fonction $\exp(x)$ tend très rapidement vers $+\infty$, par rapport aux fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^n$.

Ainsi, lorsque x tend vers $+\infty$, les quotients $\frac{\exp x}{x}$ et $\frac{\exp x}{x^n}$ vont prendre des valeurs de plus en plus petites car le numérateur sera de plus en plus grand par rapport au dénominateur :



x	1	10	20	50	100	1000
$\frac{\exp x}{x}$	2.718	2202	24258259	10^{20}	2×10^{41}	10^{431}

Propriété 6 (Croissance comparées) : On a les limites suivantes :

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty$

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp x}{x^n} = +\infty$ (où n entier naturel non nul)

Remarque : Cette propriété est souvent utilisée pour lever certaines formes indéterminées.

Exemple 9 : Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x$ (F.I : « $\infty - \infty$ »)

- $e^x - x^2 = x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - 1 \right)$
- Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} - 1 = +\infty$ (d'après (2))
- Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x^2 = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$



6 – Fonctions puissances et fonctions exponentielles de base a

Définition 2 : Pour tout réel $a > 0$, et pour tout réel b , on note $a^b = e^{b \ln(a)}$

Remarque : Dans le cas où l'exposant est un nombre entier on a : $a^n = e^{\ln(a^n)} = e^{n \ln(a)}$. La définition précédente permet de étendre la notion de puissance des nombres entiers aux nombres réels.

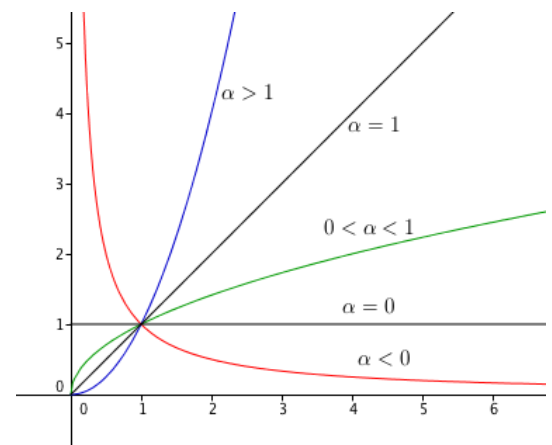
Cas particuliers :

- Si $b = 0$ alors $a^0 = e^{0 \ln(a)} = e^0 = 1$: Pour tout $a > 0$, $a^0 = 1$
- Si $b = 1$ alors $a^1 = e^{1 \ln(a)} = e^{\ln(a)} = a$: Pour tout $a > 0$, $a^1 = a$
- Si $a = 1$ alors $1^b = e^{b \ln(1)} = e^{b \times 0} = e^0 = 1$: Pour tout réel b , $1^b = 1$

Définition 3 : Soit α un nombre réel. On appelle **fonction puissance** la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$$

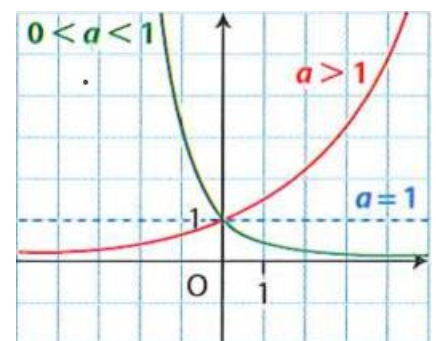
- f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a $f = e^u$ avec $u = \alpha \ln(x)$
 $f' = u'e^u$ d'où $f'(x) = \alpha \times \frac{1}{x} \times e^{\alpha \ln(x)} = \alpha \times \frac{1}{x} \times x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$
- Si $\alpha > 0$ f est croissante et si $\alpha < 0$ f est décroissante.
- Si $\alpha = 0.5$ alors $f(x) = x^{0.5} = \sqrt{x}$.
 On a alors $f'(x) = 0.5x^{0.5-1} = 0.5x^{-0.5} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^{0.5}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- Si $\alpha = -1$ alors $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$
 On a alors $f'(x) = -1x^{-1-1} = -1x^{-2} = -1 \times \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$



Définition 4 : Soit un nombre réel $a > 0$. On appelle **exponentielle de base a** la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = a^x = e^{x \ln(a)}$$

- f est dérivable sur \mathbb{R} et on a $f = e^u$ avec $u = x \ln(a)$
 $f' = u'e^u$ d'où $f'(x) = \ln(a) \times e^{x \ln(a)} = \ln(a) \times a^x$
- Si $a > 1$, $\ln(a) > 0$, donc f' est positive et f est croissante.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$: car $x \ln(a) \rightarrow +\infty$ donc $e^{x \ln(a)} \rightarrow +\infty$
- Si $0 < a < 1$, $\ln(a) < 0$ donc f' est négative et f est décroissante.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$: car $x \ln(a) \rightarrow -\infty$ donc $e^{x \ln(a)} \rightarrow 0$



Exemple 10 :

- $f(x) = 3^x$. On a alors $f'(x) = \ln(3) 3^x$ et comme $a > 1$ on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x = +\infty$
- $f(x) = 0.5^x$. On a alors $f'(x) = \ln(\frac{1}{2}) 0.5^x = -\ln(2) \times 0.5^x$ et comme $a > 1$ on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0.5^x = 0$

Remarque : On peut rapprocher les fonctions exponentielles de base a avec les suites géométriques :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $a > 0$. On a alors pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times a^n$.

On peut alors utiliser la fonction $f(x) = a^x$ pour prolonger la suite des entiers naturels à tous les réels.

Exponentielles – Fiche d'exercices

Exercice 1 (Propriétés algébriques de l'exponentielle)

Écrire les expressions suivantes sous la forme $e^A(x)$

- | | |
|----------------------------|---|
| 1. $e^{3x} \times e^5$ | 6. $\frac{e^x}{e^{-2x}}$ |
| 2. $(e^{3x})^2$ | 7. $e^{2x} \times e^{-5x}$ |
| 3. $(e^{-x})^4$ | 8. $(e^{-2x})^4$ |
| 4. $\frac{e^{5x}}{e^{2x}}$ | 9. $e^{-2x} \times e^{5x} \times \frac{1}{e^x}$ |
| 5. $\frac{1}{e^{4x}}$ | 10. $(e^{\frac{x}{5}})^4$ |

Exercice 2 (Dérivée de la fonction $x \mapsto e^x$)

Calculer la fonction dérivée de la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

- | | |
|--------------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $f(x) = 3e^x + x$ | 5. $f(x) = \frac{2}{e^x + 1}$ |
| 2. $f(x) = xe^x$ | 6. $f(x) = e^x \cos(2x)$ |
| 3. $f(x) = (2x^2 + x)e^x$ | 7. $f(x) = -\frac{1}{2}e^x + x^3 - x$ |
| 4. $f(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x + 2}$ | 8. $f(x) = (e^x + 3)^2$ |

Exercice 3 (Dérivée d'une fonction du type $u \mapsto \exp(u)$)

Calculer la fonction dérivée des fonctions f suivantes :

1. $f(x) = e^{x+1}$ sur \mathbb{R}
2. $f(x) = e^{x^2+2x+3}$ sur \mathbb{R}
3. $f(x) = 3e^{\frac{x}{2}}$ sur $]0; +\infty[$

Exercice 4 (Limites d'une fonction du type $u \mapsto \exp(u)$)

Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de f :

1. $f(x) = e^{x-1}$ sur \mathbb{R}
2. $f(x) = 3e^{\frac{1}{x}}$ sur $]0; +\infty[$
3. $f(x) = e^x - 2$ sur $]0; +\infty[$

Exercice 5 (Équations comportant une exponentielle)

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

- | | |
|------------------------|--------------------|
| 1. $e^{x+3} = e^{4-x}$ | 4. $e^x = 2$ |
| 2. $e^x = -3$ | 5. $3e^x - 1 = 5$ |
| 3. $e^{x+1} = 7$ | 6. $-2e^x + 6 = 5$ |

Exercice 6 (Inéquations comportant une exponentielle)

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

- | | |
|---------------------|----------------------|
| 1. $e^{x+2} \leq 0$ | 4. $e^{-3x+2} < 2$ |
| 2. $e^x \geq 2$ | 5. $-e^x + 5 > 0$ |
| 3. $4 - e^x \leq 0$ | 6. $3e^x - 1 \leq 3$ |

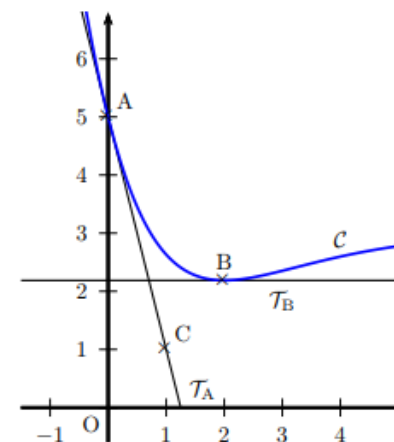
Ex 7 QCM (Tiré de divers Sujets de Bac)

On a tracé ci-contre la courbe représentative C d'une fonction f définie sur \mathbb{R} .

On sait que la courbe passe par le point $A(0; 5)$, le point B d'abscisse 2.

On a tracé la tangente T_A à la courbe au point A qui passe par le point $C(1; 1)$ ainsi que la tangente T_B à la courbe au point B qui est une droite horizontale.

Les questions 4. et 5. sont indépendantes.



1. La valeur de $f(0)$ est :

a. -4	b. 4	c. 1,2	d. autre réponse
-------	------	--------	------------------
2. La valeur de $f'(0)$ est :

a. -4	b. 4	c. 1,2	d. autre réponse
-------	------	--------	------------------
3. La valeur de $f'(2)$ est :

a. 0	b. 2,1	c. 3	d. autre réponse
------	--------	------	------------------
4. La dérivée de la fonction h définie sur \mathbf{R} par $h(x) = xe^{-2x}$ est la fonction h' définie sur \mathbf{R} par :

a. $h'(x) = e^{-2x}$	b. $h'(x) = -2e^{-2x}$	c. $h'(x) = -2xe^{-2x}$	d. $h'(x) = (1 - 2x)e^{-2x}$
----------------------	------------------------	-------------------------	------------------------------
5. L'équation $e^{2x} = 3$ admet comme solution dans \mathbb{R} :

a. $\frac{3}{2}$	b. $\frac{1}{2} \ln(3)$	c. $\frac{3}{2}e$	d. $\ln(9)$
------------------	-------------------------	-------------------	-------------

Ex 8 Etude de fonction (Tiré du Bac Polynésie 2016)**Partie A : Lecture graphique**

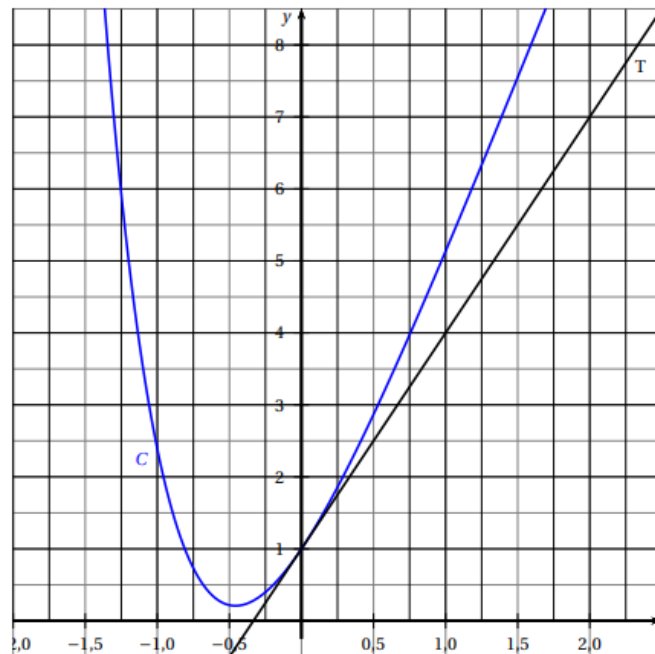
On considère la courbe C associée à une fonction f représentée en ANNEXE 2 avec la droite T , tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

- Résoudre graphiquement sur l'intervalle $[-1 ; 1,5]$ et avec la précision permise par le dessin les deux inéquations suivantes :
 - $f(x) \geq 1$
 - $f'(x) \geq 0$.
- Donner l'équation de la tangente T à la courbe C au point de coordonnées $(0 ; 1)$ en sachant que cette tangente passe par le point de coordonnées $(2 ; 7)$.
 - En déduire le nombre dérivé $f'(0)$.

Partie B : Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par la relation $f(x) = e^{-2x} + 5x$.

- Déterminer, en la justifiant, la limite de f en $+\infty$.
On admet pour la suite que la limite de f en $-\infty$ est $+\infty$.
- Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur \mathbb{R} .
- En déduire le tableau des variations de la fonction f sur \mathbb{R} .
- Déterminer à partir du tableau des variations le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$.
 - Donner une valeur arrondie à 10^{-2} près de chaque solution.

**Ex 9** Gants de sécurité (Tiré du Bac Métropole Septembre 2016)

Dans cet exercice, la température est exprimée en degrés Celsius ($^{\circ}\text{C}$) et le temps t est exprimé en minutes.

Dans une entreprise de fabrication de pièces métalliques, un ouvrier doit manipuler des plaques chaudes pendant une dizaine de secondes. À la sortie du four, les plaques sont à une température de 300°C et disposées dans une pièce dont la température ambiante est maintenue à 26°C par un système de ventilation.

La commission de sécurité prescrit qu'avec les gants actuels, l'ouvrier doit attendre 10 minutes pour manipuler les plaques à leur sortie du four. Afin de réduire ce délai d'attente, le directeur s'interroge sur l'achat de nouveaux gants dont les caractéristiques techniques établies par la commission de sécurité sont les suivantes :

- Sans couture.
- Très doux et confortables.
- Température maximale d'utilisation : 240°C .

- Dans cette question, on ne demande pas de justification.
 - Quelle est, à la sortie du four, la température des plaques?
 - Comment varie, à la sortie du four, la température des plaques au cours du temps?
 - Vers quelle valeur la température des plaques devrait-elle se stabiliser?
- La température d'une plaque depuis sa sortie du four, est modélisée en fonction du temps t , exprimé en minutes, par une fonction g . On admet que cette fonction g est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $g(t) = 274e^{at} + 26$ où a est un nombre réel.
 - Calculer $g(0)$. Ce résultat est-il conforme aux données?
 - D'après la question 1, quel doit être le signe du nombre réel a ?
 - On sait que 3 minutes après sa sortie du four la température de la plaque, arrondie à l'unité, est de 262°C .
Montrer que la valeur approchée à 10^{-2} près du coefficient a est $-0,05$.
- Dans cette question on considère que, pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0 ; +\infty[$:

$$g(t) = 274e^{-0,05t} + 26.$$

- Avec les gants actuellement utilisés, à quelle température l'ouvrier pourra-t-il manipuler les plaques après leur sortie du four, en respectant les caractéristiques techniques de la commission de sécurité?
- Si le directeur décidait d'équiper les ouvriers avec les nouveaux gants, quel délai d'attente minimal serait requis avant que les ouvriers puissent manipuler les plaques?
- En déduire le gain de temps, en pourcentage, dû à l'utilisation de ces nouveaux gants.

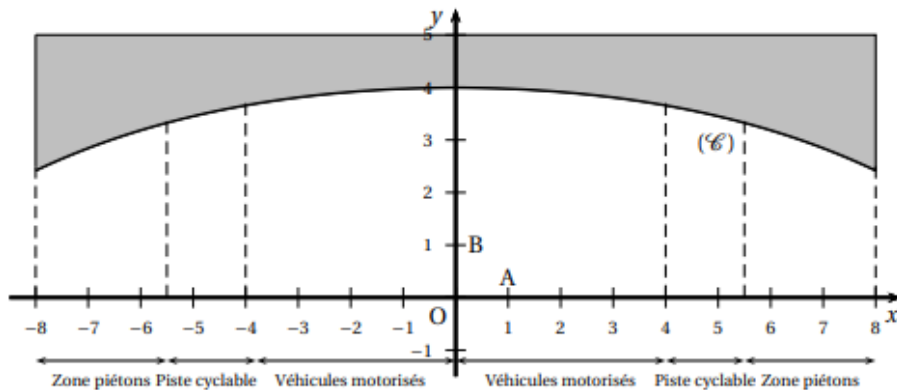
Ex 10 Pont (Tiré du Bac Polynésie 2015)

Un pont à une seule arche d'une longueur de 16 m enjambe une route à double circulation.

La figure ci-dessous donne une vue de l'une des deux façades de ce pont (1 unité représente 1 mètre).

La partie supérieure du pont est à une hauteur de 5 m au-dessus de la route.

La partie de l'axe des abscisses comprise entre -8 et 8 représente la chaussée sur laquelle sont délimitées les zones de circulation des piétons, des cyclistes et des véhicules motorisés.



Soit la fonction f définie, pour tout réel x de l'intervalle $[-8; 8]$, par

$$f(x) = k - 0,5(e^{0,2x} + e^{-0,2x}) \quad \text{où } k \text{ désigne un entier naturel fixé.}$$

On note (\mathcal{C}) sa courbe représentative, donnée ci-dessus dans le repère orthonormé (O, A, B) .

- Déterminer graphiquement $f(0)$. En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $[-8; 8]$:

$$f(x) = 5 - 0,5(e^{0,2x} + e^{-0,2x}).$$

- En tenant compte du fait que l'on doit laisser une hauteur de sécurité de 50 cm, quelle doit être la hauteur maximale exprimée en mètre d'un véhicule motorisé pour qu'il puisse passer sous le pont? On arrondira le résultat à 10^{-1} .
- Montrer que la fonction f' dérivée de la fonction f est définie, pour tout réel x de l'intervalle $[-8; 8]$, par $f'(x) = 0,1e^{-0,2x}(1 - e^{0,4x})$.
- Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[-8; 8]$. En déduire le tableau de variation de f sur $[-8; 8]$.

Ex 11 Alcoolémie (Tiré du Bac Polynésie Septembre 2014)

Lorsque l'on consomme de l'alcool, le taux d'alcool dans le sang varie en fonction du temps écoulé depuis l'absorption. Ce taux est appelé « alcoolémie » et est mesuré en grammes par litre (g/L).

Après l'absorption de trois verres d'alcool, l'alcoolémie d'une personne donnée, en fonction du temps (exprimé en heures), est modélisée par la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par :

$$f(t) = 2,5te^{-t}.$$

Partie A

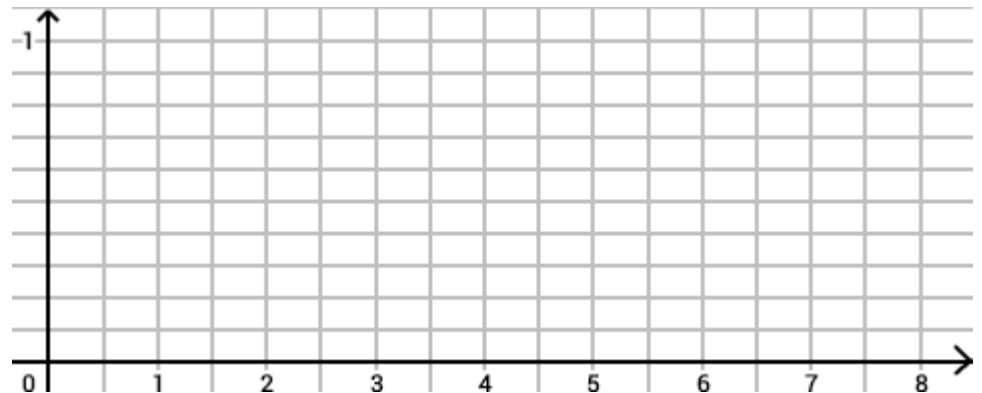
- Donner la valeur de l'alcoolémie de la personne considérée au bout de 2 heures.
- Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0; +\infty[$, $f'(t) = 2,5(1-t)e^{-t}$.
- Vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E): \quad y' + y = 2,5e^{-t}.$$

- En remarquant que pour tout réel t de l'intervalle $[0; +\infty[$ on a $f(t) = \frac{2,5t}{e^t}$, déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ et donner une interprétation géométrique de cette limite.
- Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
- Quelle est l'alcoolémie la plus élevée pour la personne considérée?

Partie B

- Sur une feuille de papier millimétré, tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$. On prendra 2 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 10 cm pour unité sur l'axe des ordonnées.
- En France, la législation autorise pour un conducteur une alcoolémie maximale de 0,5 g/L. Sachant que la personne a absorbé trois verres d'alcool à 12 h, à partir de quelle heure pourra-t-elle reprendre la route pour effectuer sans s'arrêter un trajet d'une durée d'une heure? On utilisera la représentation graphique de la fonction f .



Ex 12 Ailerons de poulet

Dans cet exercice, la température est exprimée en degrés Celsius ($^{\circ}\text{C}$) et le temps t est exprimé en heures.

Une entreprise congèle des ailerons de poulet dans un tunnel de congélation avant de les conditionner en sachets. À l'instant $t = 0$, les ailerons, à une température de 5°C , sont placés dans le tunnel. Pour pouvoir respecter la chaîne du froid, le cahier des charges impose que les ailerons aient une température inférieure ou égale à -24°C .

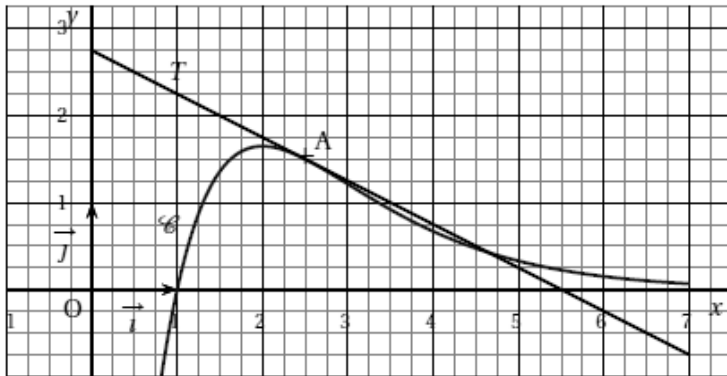
PARTIE A

La température des ailerons dans le tunnel de congélation est modélisée en fonction du temps t par la fonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(t) = 35e^{-1,6t} - 30$.

1. Déterminer la température atteinte par les ailerons au bout de 30 minutes, soit 0,5 h.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f .
3. Si les ailerons de poulet sont laissés une heure et demie dans le tunnel de congélation, la température des ailerons sera-t-elle conforme au cahier des charges ?
4. Résoudre par le calcul l'équation $f(t) = -24$ et interpréter le résultat trouvé.

Ex 13 Etude de fonction

Sur le graphique ci-dessous, \mathcal{C} est la courbe représentative, dans le repère ortho-normé (O, \vec{i}, \vec{j}) , d'une fonction f définie sur \mathbb{R} .



Partie A - Étude graphique

La droite T est tangente à \mathcal{C} au point $A(2,5; 1,5)$ et d'ordonnée à l'origine 2,75. L'axe des abscisses est asymptote horizontale à \mathcal{C} au voisinage de $+\infty$. Déterminer graphiquement et indiquer sur votre copie :

1. $f(1)$;
2. $f'(2,5)$;
3. Une équation de la tangente T ;
4. $\lim_{+\infty} f(x)$.

Partie B - Modélisation

On admet qu'il existe deux réels a et b tels que :

$$\text{pour tout réel } x, f(x) = (ax + b)e^{-x+2,5}.$$

1. Calculer $f'(x)$ en fonction de a et b .
2. Exprimer en fonction des réels a et b les nombres suivants :

$$f(1) \quad ; \quad f'(2,5).$$

3. Dédire des questions précédentes un système d'équations vérifiées par a et b .
4. Résoudre ce système et en déduire l'expression de $f(x)$ en fonction de x .

Partie C - Étude algébrique

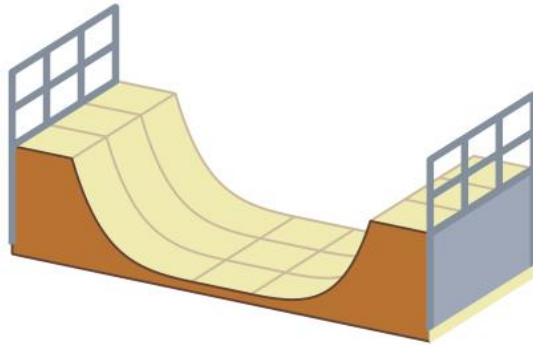
On admet que pour tout réel x , $f(x) = (x-1)e^{-x+2,5}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. a. Montrer que pour tout réel x ,

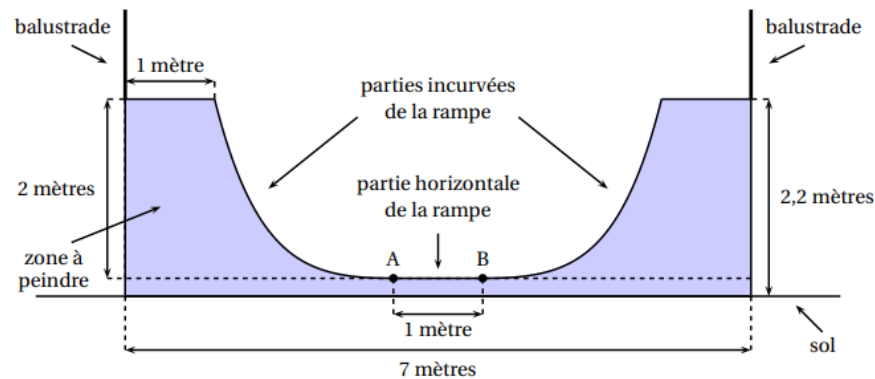
$$f(x) = e^{2,5} \left(\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right).$$

- b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x .
b. Étudier le signe de f' et en déduire le tableau des variations de la fonction f en faisant figurer les limites trouvées précédemment.

Ex 14 Rampe de Skate (Tiré du Bac Antilles-Guyane 2018)



On a représenté ci-dessous une des faces latérales d'une rampe de skate-board que l'on souhaite peindre.



On sait de plus que la face latérale de cette rampe de skate-board admet comme axe de symétrie la médiatrice de [AB].

Indication pour la partie C

- Une primitive de la fonction f est une fonction F qui vérifie $F'(x) = f(x)$
- On admet que l'aire délimitée par la Courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$ est égale à $F(2) - F(0)$

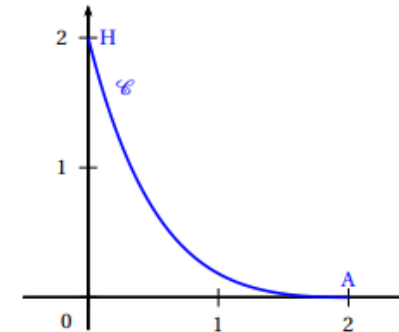
Partie A

On modélise la partie incurvée de la rampe située à gauche de l'axe de symétrie à l'aide de la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 2]$ par :

$$f(x) = (0,5x^2 + ax + b)e^{-x}$$

où a et b sont deux réels que l'on souhaite déterminer.

On a tracé ci-après la courbe représentative \mathcal{C} de f dans un repère orthonormal d'unité 1 mètre.



On sait que la courbe \mathcal{C} passe par les points A(2; 0) et H(0; 2).

1. Déterminer $f(0)$ et $f(2)$.
2. Dédire de la question précédente le système d'équations vérifié par les réels a et b .
3. Déterminer l'expression de $f(x)$.

Partie B

On considère maintenant que la fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 2]$ par :

$$f(x) = (0,5x^2 - 2x + 2)e^{-x}.$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Montrer que la tangente à la courbe \mathcal{C} au point A est l'axe des abscisses.
3. Justifier que le signe de $f'(x)$ est donné par le signe du trinôme $-0,5x^2 + 3x - 4$.
4. En déduire le signe de $f'(x)$ puis le sens de variation de f sur $[0; 2]$.

Partie C

1. Justifier que la fonction f est positive sur l'intervalle $[0; 2]$.
2. On admet que la fonction F définie par $F(x) = (-\frac{1}{2}x^2 + x - 1)e^{-x}$ sur l'intervalle $[0; 2]$ est une primitive de la fonction f sur $[0; 2]$.
Montrer que l'aire en m^2 de la partie délimitée par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$ est égale à $1 - \frac{1}{e^2}$.
3. En déduire l'aire de la zone à peindre. On donnera une valeur approchée du résultat à $0,01 m^2$ près.

Ex 15 Monoxyde de Carbone (Tiré du Bac Métropole Septembre 2015)

« Avec une centaine de décès en moyenne par an, le monoxyde de carbone (CO) est la première cause de mortalité accidentelle par intoxication en France. [...] Pourtant certains symptômes annonciateurs d'une intoxication au monoxyde de carbone existent. Maux de tête, nausées et vomissements sont notamment les premiers signes qui doivent alerter. Bien identifiés, ils permettent de réagir rapidement et d'éviter le pire. »

Source Ministère des Affaires Sociales et de la Santé. (octobre 2012)

Document 1

La société COalerte fabrique un modèle de détecteurs qui enregistre en temps réel la concentration de monoxyde de carbone en parties par million (ppm).

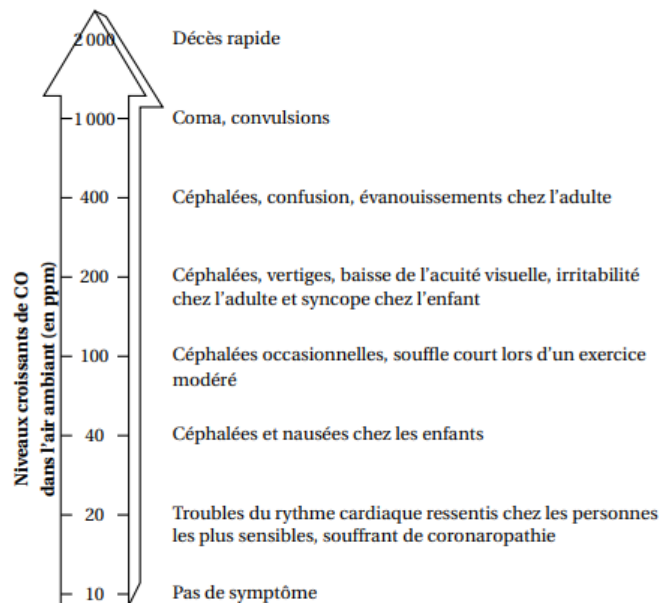
Un tel détecteur produit un signal d'alarme respectant les modalités fixées par la norme européenne EN 50 291 ci-dessous.

Il déclenche un signal d'alarme :

- si la concentration est supérieure à 30 ppm pendant au moins 120 minutes ;
- si la concentration est supérieure à 50 ppm pendant au moins 60 minutes ;
- si la concentration est supérieure à 100 ppm pendant au moins la minutes ;
- si la concentration est supérieure à 300 ppm pendant au moins 3 minutes.

Document 2

Symptômes et effets sur la santé du monoxyde de carbone

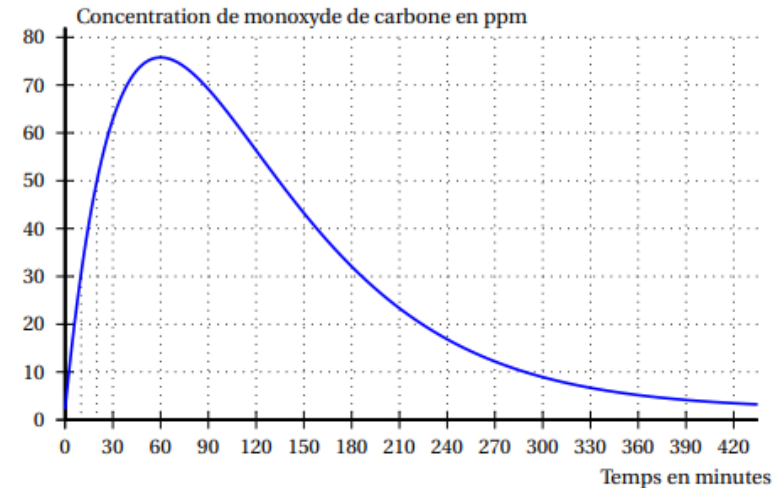


Source : Commission européenne 2014.

Un laboratoire d'essais procède à des tests sur un détecteur produit par la société COalerte en simulant un accident qui provoque une concentration anormale de monoxyde de carbone dans une pièce.

Partie A

Le laboratoire relève la concentration de monoxyde de carbone en fonction du temps, exprimé en heures. Les enregistrements effectués sur une période de 8 heures se traduisent par la représentation graphique ci-dessous.



1. Estimer au bout de combien de temps devrait retentir un signal d'alarme.
2. Une personne présente dans la pièce depuis le début d'un tel accident risquerait-elle de présenter des symptômes ? Si oui, lesquels ?

Partie B

Dans cette partie, tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

La concentration de monoxyde de carbone exprimée en ppm dans la pièce en fonction du temps, exprimé en heures, est modélisée par la fonction f définie sur $[0; 8]$ par

$$f(t) = 2,2 + 200te^{-t}.$$

1. Calculer la concentration de monoxyde de carbone en ppm dans la pièce :
 - a. au moment de l'accident ;
 - b. 30 minutes après.
2. À l'aide du graphique de la partie A, conjecturer les variations de la concentration de monoxyde de carbone dans la pièce en fonction du temps.
3. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0; 8]$.
 - a. Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0; 8]$, $f'(t) = 200(1-t)e^{-t}$.
 - b. Étudier le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0; 8]$.
 - c. Valider ou invalider la conjecture émise à la question 2.

Ex 16 Chauffage (Tiré du Bac Métropole 2013)

On éteint le chauffage dans une pièce d'habitation à 22 h. La température y est alors de 20 °C.

Le but de ce problème est d'étudier l'évolution de la température de cette pièce, puis de calculer l'énergie dissipée à l'extérieur, au cours de la nuit, de 22 h à 7 h le lendemain matin.

On suppose, pour la suite du problème, que la température extérieure est constante et égale à 11 °C.

On désigne par t le temps écoulé depuis 22 h, exprimé en heures, et par $f(t)$ la température de la pièce exprimée en °C. La température de la pièce est donc modélisée par une fonction f définie sur l'intervalle $[0; 9]$

Partie A :

1. Prévoir le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 9]$. On admet désormais que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0; 9]$ par

$$f(t) = 9e^{-0,12t} + 11.$$

2. Donner une justification mathématique du sens de variation trouvé à la question précédente.
3. Calculer $f(9)$. En donner la valeur arrondie au dixième puis interpréter ce résultat.
4. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'heure à partir de laquelle la température est inférieure à 15 °C.
5. Retrouver le résultat précédent en résolvant une inéquation.

Partie B :

Le flux d'énergie dissipée vers l'extérieur, exprimé en kilowatts (kW), est donné par la fonction g telle que, pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0; 9]$,

$$g(t) = 0,7e^{-0,12t}.$$

L'énergie \mathcal{E} ainsi dissipée entre 22 h et 7 h, exprimée en kilowattheures (kWh), s'obtient en calculant l'intégrale

$$\mathcal{E} = \int_0^9 g(t) dt.$$

1. Calculer la valeur exacte de l'énergie dissipée.
2. En déduire une valeur arrondie de \mathcal{E} à 0,1 kWh près.