Expressions algébriques - Activités

Activité 1 : Le but de cette activité est de trouver le nombre de carreaux grisés d'une figure construite sur le modèle ci-dessous, quel que soit le nombre de carreaux sur le côté du carré.

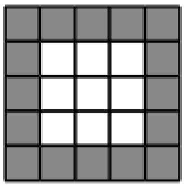


Figure 1

Figure 2

1) Combien y a-t-il de carreaux grisés dans un carré de 5 carreaux de côté ?
2) On note n le nombre de carreaux sur le côté du carré. Trouver plusieurs formules pour calculer le nombre de carreaux grisés dans un carré de n carreaux de côtés.

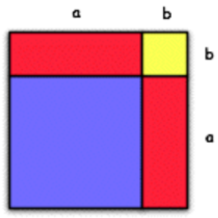
   Formule 1 :

   Formule 2 :

   Formule 3 :

   Formule 4 :
3) En déduire le nombre de carreaux grisés dans avec un carré de 37 carreaux de côté.
4) Démontrer que toutes les formules trouvés sont égales.
5) Combien faut-il choisir de carreaux de côtés pour obtenir 100 carreaux grisés ?
6) Combien y'a-t-il de cubes grisés dans un « rubik-cube » construit sur le modèle de la Figure 2 avec 99 cubes de coté.

Activité 2 :



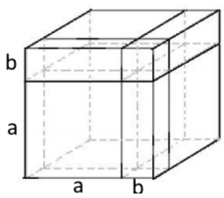
1) On considère un carré découpé de la manière ci-contre.

   a. Calculer de 2 façons différentes, l'aire totale du carré, en fonction de a et b.

   Méthode 1 :

   Méthode 2 :

   b. Quelle égalité obtient-on ?



2) On considère maintenant un cube découpé de la façon ci-contre.

   a. Calculer de 2 façons différentes, le volume total du cube en fonction de a et b.

   Méthode 1 :

   Méthode 2 :

   b. Quelle égalité obtient-on ?

Expressions algébriques - Cours

1 – Developpement et Factorisation

Définition 1 :

• **Développer** un produit, c'est écrire ce produit sous la forme d'une somme.

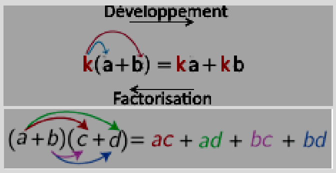
• **Factoriser** une somme, c'est écrire cette somme sous la forme d'un produit.

Pour développer ou factoriser une expression algébrique, on utilise les propriétés de distributivité :

Propriété 1 : Pour tous nombres réels a, b, c, d et k, on a

• **Simple distributivité :** $k(a+b) = ka + kb$

• **Double distributivité :** $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$



Exemple 1 :

- $2(5+x)$ est un produit qui se développe en $2 \times 5 + 2 \times x$ c'est-à-dire $10 + 2x$.
- $x^2 + 3x$ est une somme qui se factorise en $x(x+3)$.
- $(2x+1)(3-x)$ est un double produit qui se développe en $2x \times 3 + 2x \times (-x) + 1 \times 3 + 1 \times (-x)$.

2 – Identités remarquables

Propriété 2 : Pour tous nombres réels a, b, on a :

• $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

• $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

• $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Démonstration : Soient a et b deux nombres réels. On a :

• $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

• $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

• $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$.

Note

On utilise la double-distributivité pour développer.

On a $ab = ba$.

Exemple 2 :

1) Développer les expressions suivantes :

➢ $A(x) = (x+3)^2$

$A(x) = x^2 + 2 \times 3 \times x + 3^2$

$A(x) = x^2 + 6x + 9$

➢ $B(x) = (5-2x)^2$

$B(x) = 5^2 - 2 \times 5 \times 2x + (2x)^2$

$B(x) = 25 - 20x + 4x^2$

2) Factoriser les expressions suivantes :

➢ $C(x) = x^2 - 81$

$C(x) = x^2 - 9^2$

$C(x) = (x+9)(x-9)$

Expressions algébriques - Exercices

Développement

1 (Simple distributivité)

Développer et réduire les expressions suivantes :

a. $A = \square \times (\triangle + \circ)$
b. $B = 2(x+5)$
c. $C = 7(1-2x)$
d. $D = 5x(x-3)$
e. $E = 7(2t-1) - 3(1-t)$
f. $F = 3n(2-4n^2) - (5n-1)$

2 (Double distributivité)

Développer et réduire les expressions suivantes :

a. $A = (\spadesuit + \heartsuit) \times (\diamondsuit + \clubsuit)$
b. $B = (2x+7)(3+5x)$
c. $C = (x-1)(4-x)$
d. $D = -(2t+1)(3-t)$
e. $E = (x+2)(2x+1) - (3-x)(x+2)$
f. $F = (z+1)(z+2)(z+3)$

3 (Identités remarquables)

Développer et réduire les expressions suivantes :

a. $A = (\square + \circ)^2$
b. $B = (x+3)^2$
c. $C = (2x+5)^2$
d. $D = (\diamondsuit - \triangle)^2$
e. $E = (1-x)^2$
f. $F = (2-5t)^2$
g. $G = (\square + \triangle)(\square - \triangle)$
h. $H = (1-x)(1+x)$
i. $I = (2n+9)(2n-9)$

Factorisation

4 (Distributivité)

Factoriser les expressions suivantes :

a. $A = \square \times \triangle + \square \times \diamondsuit$
b. $B = \triangle^2 + 2 \times \triangle$
c. $C = 5x^2 + 3x$
d. $D = x^2 - x$
e. $E = 2t^3 - 3t^2 + t$
f. $F = (x-2)(2x-1) - (3-x)(x-2)$
g. $G = (2x+1)^2 - 3(2x+1)$
h. $H = (n-5)^2 + (n-5)(1+x) + n - 5$
i. $I = (2n+1)^2 - 2n - 1$

5 (Identités remarquables)

Factoriser les expressions suivantes :

a. $A = \square^2 - \triangle^2$
b. $B = x^2 - 36$
c. $C = 4t^2 - 25$
d. $D = x^2 - 6x + 9$

Problèmes & Applications

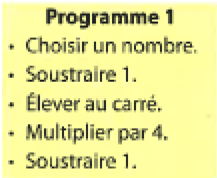
6 (Calcul mental)

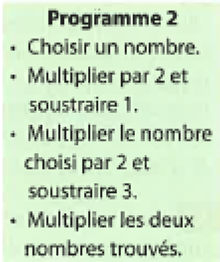
Calculer mentalement les nombres suivants :

a. 105^2 b. 99^2
c. $51^2 - 49^2$ d. $25^2 - 21 \times 25$

7 (Programme de calcul)

Voici deux programmes de calculs

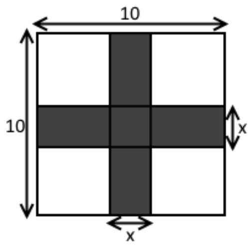




1) Exécuter ces deux programmes de calcul avec les nombres : -1 ; 0 ; 1 et 2.
2) Que peut-on conjecturer ?
3) Démontrer votre conjecture.

8 (Jardin)

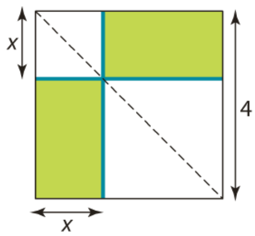
Un propriétaire d'une maison dispose d'un jardin de $10m$ sur $10m$. Il décide de créer deux allées centrales de même largeur x mètres et d'aménager le reste en pelouse.



1) Exprimer la surface totale $A(x)$ occupée par les allées en fonction de x.
2) Quelle sera la surface de pelouse restante si l'on réalise des allées de 1,5 m de largeur ?

9 (Un carré partagé en 4)

On considère un carré de côté $4\,cm$ partagé en 4 parties selon le schéma ci-contre. On note $A(x)$ l'aire du domaine constitué par les deux carrés blancs et $B(x)$ l'aire du domaine constitué par les deux rectangles coloriés.



1) Exprimer $A(x)$ en fonction de x.
2) Exprimer $B(x)$ en fonction de x.
3) Vérifier que :
$$16 - 2x(4-x) = x^2 + (4-x)^2$$
4) Donner une interprétation géométrique de cette égalité.