Fiche F1.1 : Polynôme du Second degré

1 – Forme développée

Définition 1 : Soit a, b et c trois nombres réels tel que $a \neq 0$. On appelle **polynôme du second degré** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Exemple 1 : La fonction f définie par $f(x) = x^2 - 4x + 3$ est un polynôme du second degré.

Ses coefficients sont $a = 1$, $b = -4$ et $c = 2$.

Définition 2 : On appelle **discriminant** du polynôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$

Exemple 2 : Le discriminant du polynôme $f(x) = x^2 - 4x + 3$ est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4$

2 – Forme canonique

Propriété 1 : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré. Il existe deux nombres réels α et β tel que f puisse s'écrire sous la forme dite **canonique** $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

De plus, on a $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha) = -\frac{\Delta}{4a}$.

Démonstration : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré.

- On factorise par a : $f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$
- $x^2 + \frac{b}{a}x$ est le début d'une identité remarquable $A^2 + 2AB + B^2$ que l'on va faire apparaître :

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \mathbf{2}\,\frac{b}{\mathbf{2}a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\underbrace{x^2 + 2\,\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{A^2+2AB+B^2} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$$

- On utilise l'identité remarquable $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ avec $A = x$ et $B = \frac{b}{2a}$:

$$f(x) = a\left(\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{(A+B)^2} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$$

- On fait apparaître α et on développe $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$: $f(x) = a\left(\left(x - \underbrace{\frac{-b}{2a}}_{\alpha}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$

- On met les deux fractions au même dénominateur et on fait apparaitre Δ :

$$f(x) = a\left((x-\alpha)^2 + \frac{-b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right) = a\left((x-\alpha)^2 + \frac{-b^2+4ac}{4a^2}\right) = a\left((x-\alpha)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right)$$

- On developpe le a puis on fait apparaître β : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \underbrace{\frac{-\Delta}{4a}}_{\beta} = a(x-\alpha)^2 + \beta$ □

Exemple 3 : Mettre sous la forme canonique le polynôme $f(x) = x^2 - 4x + 3$

On calcule $\alpha = \frac{-(-4)}{2\times 1} = \frac{4}{2} = 2$.

On calcule $\beta = f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$ ou bien $\beta = -\frac{4}{4\times 1} = -1$

On obtient donc $f(x) = (x-2)^2 - 1$

3 – Forme factorisée

Propriété 2 : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré.

- Si $\Delta > 0$ alors f peut se factoriser sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$ alors f peut se factoriser sous la forme $f(x) = a(x - x_0)^2$ avec : $x_0 = -\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$ alors il n'y a pas de factorisation possible.

Remarque : On dit que x_0, x_1 et x_2 sont les **racines** du polynôme. Ce sont les valeurs où la fonction s'annule.

Démonstration : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré.

- On peut écrire sous forme canonique de f : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$

  On factorise par a : $f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$

- 1er cas : $\Delta > 0$. On peut prendre la racine de Δ

  On fait apparaitre l'identité remarquable $A^2 - B^2$: $f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\sqrt{\Delta}^2}{4a^2}\right) = a\left(\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2}_{A^2 - B^2}\right)$

  On utilise l'identité remarquable $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ avec $A = x + \frac{b}{2a}$ et $B = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$:

$$f(x) = a\left(\left(\underbrace{x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}}_{A+B}\right)\left(\underbrace{x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}}_{A-B}\right)\right)$$

  On met sur le même dénominateur et on fait apparaître x_1 et x_2 :

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right) = a\left(\left(x - \underbrace{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}_{x_1}\right)\left(x - \underbrace{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}_{x_2}\right)\right) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- 2ème cas : $\Delta = 0$. f s'écrit sous la forme $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 = a(x - x_0)^2$

- 3ème cas : $\Delta < 0$. Supposons que f se factorise comme produit de facteur du premier degré.

  Dans ce cas la fonction s'annulerait ce qui est impossible car comme $\Delta < 0$ on a $-\Delta > 0$:

$$f(x) = a\left(\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{-\Delta}{4a^2}}_{>0}\right) = \underbrace{a}_{\neq 0}\left(\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}}_{\neq 0}\right) \text{donc } f(x) \neq 0$$

□

Exemple 4 : Factoriser si possible le polynôme $f(x) = x^2 - 4x + 3$

On a $\Delta = 8 > 0$ donc f peut se factoriser sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

On calcule $x_1 = \frac{-(-4)-\sqrt{4}}{2\times 1} = \frac{4-2}{2} = 1$. On calcule $x_2 = \frac{-(-4)+\sqrt{4}}{2\times 1} = \frac{4+2}{2} = 3$.

On obtient donc $f(x) = (x - 1)(x - 3)$

Application : On peut résoudre l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$ en utilisant la règle du produit nul :

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \iff (x - 1)(x - 3) = 0 \iff x - 1 = 0 \text{ ou } x - 3 = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = 3$$

Les solutions de l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$ sont 1 et 3.