

## Fiche F1.2 : Equation du Second degré

### 1 – Résolution de l'équation du second degré

Propriété 1 : On considère l'équation du second degré  $ax^2 + bx + c = 0$ .

- Si  $\Delta > 0$  alors l'équation possède **deux** solutions distinctes qui sont :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si  $\Delta = 0$  alors l'équation possède **une** solution unique qui est  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ .

- Si  $\Delta < 0$  alors l'équation possède **aucune** solution.

Démonstration : On considère l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$ . Soit  $f$  le polynôme  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

- Si  $\Delta > 0$ , la forme factorisée de  $f$ , permet d'écrire l'équation sous forme d'un produit nul.

Comme  $a \neq 0$  on a :  $a(x - x_1)(x - x_2) = 0 \Leftrightarrow x - x_1 = 0$  ou  $x - x_2 = 0 \Leftrightarrow x = x_1$  ou  $x = x_2$ .

L'équation admet donc deux solutions qui sont  $x_1$  et  $x_2$ .

- Si  $\Delta = 0$ , on utilise également la forme factorisée de  $f$  :  $a(x - x_0)^2 = 0 \Leftrightarrow x - x_0 = 0 \Leftrightarrow x = x_0$ .

L'équation admet donc une solution qui est  $x_0$ .

- Si  $\Delta < 0$ , alors on a vu que la factorisation était impossible car la fonction ne s'annule pas.

Le polynôme n'admet donc pas de racines et l'équation pas de solutions. □

Exemple 1 : Résoudre les équations suivantes :

1)  $x^2 - x - 1 = 0$

$a = 1, b = -1$  et  $c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$

L'équation possède donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,68 \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{5}}{2 \times 1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,68.$$

$$S = \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$$

2)  $2x^2 - 4x + 2 = 0$

$a = 2, b = -4$  et  $c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 16 - 16 = 0$

L'équation possède donc une seule solution :  $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \times 2} = \frac{4}{4} = 1$

$$S = \{1\}$$

3)  $-3x^2 + x - 2 = 0$

$a = -3, b = 1$  et  $c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times (-3) \times (-2) = 1 - 24 = -23 < 0$

L'équation ne possède donc pas de solution.

$$S = \emptyset$$



## 2 – Relation entre racines et coefficients

Propriété 2 : Soit  $f(x) = ax^2 + bx + c$  un polynôme du second degré qui possède deux racines **distinctes**.

- La somme  $S$  de ces racines est égale à  $S = -\frac{b}{a}$ .
- La produit  $P$  de ces racines est égale à  $P = \frac{c}{a}$ .

Démonstration : Soit  $f(x) = ax^2 + bx + c$  un polynôme qui possède deux racines distinctes  $x_1$  et  $x_2$ .

- On utilise encore la forme factorisée  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$  que nous allons développer :

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2) \quad (\text{On développe le double produit})$$

$$= a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) \quad (\text{On regroupe les termes en « } x \text{ »})$$

$$= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 \quad (\text{On développe le « } a \text{ »})$$

- On identifie avec la forme développée :  $ax^2 - \underbrace{a(x_1 + x_2)}_b x + \underbrace{ax_1x_2}_c = ax^2 + bx + c$

$$\text{On obtient } \begin{cases} -a(x_1 + x_2) = b \\ ax_1x_2 = c \end{cases} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} S = -\frac{b}{a} \\ P = \frac{c}{a} \end{cases}$$

□

Exemple 2 : On considère l'équation du second degré  $2x^2 - 12x + 10 = 0$

- 1) Trouver une solution évidente.

$$1 \text{ est une solution évidente : } 2 \times 1^2 - 12 \times 1 + 10 = 2 - 12 + 10 = 0.$$

- 2) En utilisant la relation entre racines et coefficients trouver la deuxième solution.

$$1 \times x_2 = \frac{10}{2} \text{ d'où } x_2 = 5 \text{ ou bien } 1 + x_2 = -\frac{-12}{2} = 6 \text{ d'où } x_2 = 6 - 1 = 5.$$

