Fiche ___ : Fonction inverse – Dérivée et Sens de variation

1 – Définition & Courbe représentative

Définition 1 :

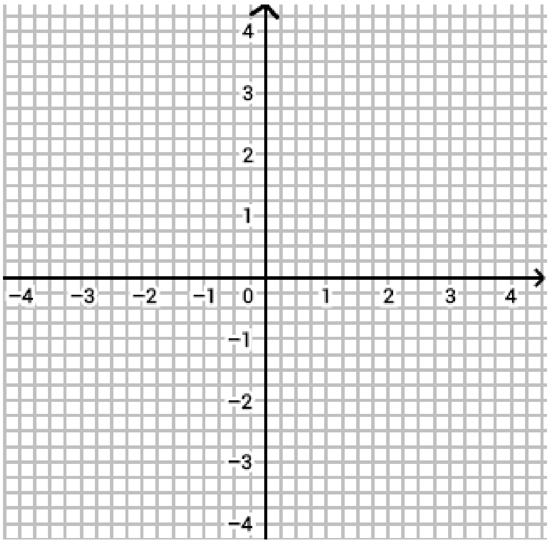
Exemple 1 :

1) Quelle est l'image par la fonction inverse des nombres suivants : 2 ; -3 ; $\frac{1}{5}$; 0.01 ?
2) Quel(s) sont les antécédents par la fonction inverse des nombres suivants : $\frac{1}{2}$; 4 ; 0.1 ?
3) Que se passe t-il lorsque calcule l'inverse de 0 ?

Ensemble de définition :

Courbe représentative : La courbe représentative de la fonction inverse est une **hyperbole**. Elle est **symétrique** par rapport à l'origine du repère

x	-4	-3	-2	-1	$-0,5$	-0.25	0	0.25	$0,5$	1	2	3	4
$f(x)$													



2 – Propriétés de la fonction inverse

Propriété 1 :

Remarque : Comme pour tout réel x, $x^2 > 0$, on a donc $f'(x) < 0$ sur son ensemble de définition.

Propriété 2 :

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

Remarque : La fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ qui n'est pas un intervalle. On a par exemple :

Démonstration : Dérivée de la fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$.

• On considère un nombre réel non nul quelconque $a \neq 0$. Nous allons montrer que f est dérivable en a.

• Pour un pas $h > 0$, calculons le taux d'accroissement entre a et $a + h$

$$\tau_a(h) = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a-(a+h)}{(a+h)a}}{h} = \frac{a-a-h}{(a+h)a} \times \frac{1}{h} = \frac{-h}{(a+h)a} \times \frac{1}{h} = -\frac{1}{(a+h)a}$$

• Lorsque h se rapproche de 0, $\tau_a(h) = -\frac{1}{(a+h)a}$ se rapproche du nombre réel $-\frac{1}{a^2}$.

• La fonction f est donc dérivable en a et on a donc $f'(a) = \lim_{h \to 0} \tau_a(h) = -\frac{1}{a^2}$.

• Comme a est un nombre réel non nul quelconque, la fonction inverse est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$