Fiche F2.1 : Fonction inverse – Dérivée et Sens de variation

1 – Définition & Courbe représentative

Définition 1 : La fonction inverse est la fonction qui à chaque nombre réel x non nul associe son inverse $\frac{1}{x}$.

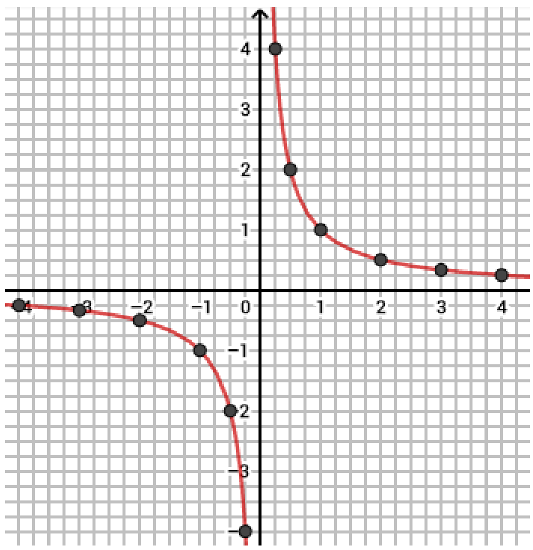
Exemple 1 :

- L'image de 2 est $\frac{1}{2}$; L'image de -3 est $\frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$; L'image de $\frac{1}{5}$ est $\frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$; L'image de 0.01 est $\frac{1}{0.01} = 100$.
- L'antécédent de $\frac{1}{2}$ est 2 ; $4 = \frac{1}{\frac{1}{4}}$ donc l'antécédent de 4 est $\frac{1}{4}$; $0.1 = \frac{1}{10}$ donc l'antédédent de 0.1 est 10.
- 0 n'a pas d'image par la fonction inverse car on ne peut pas diviser par « 0 ». 0 est une **valeur interdite**.

Ensemble de définition : $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

Courbe représentative : La courbe représentative de la fonction inverse est une **hyperbole**. Elle est **symétrique** par rapport à l'origine du repère

x	-4	-3	-2	-1	$-0{,}5$	-0.25	0	0.25	$0{,}5$	1	2	3	4
$f(x)$	-0.25	-0.33	-0.5	-1	-2	-4	$\|\|$	4	2	1	0.5	0.33	0.25



2 – Propriétés de la fonction inverse

Propriété 1 : La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout réel x non nul, on a $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Remarque : Comme pour tout réel x, $x^2 > 0$, on a donc $f'(x) < 0$ sur son ensemble de définition.

Propriété 2 : La fonction inverse est **décroissante** sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ et sur l'intervalle $]0; +\infty[$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	

Remarque : La fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ qui n'est pas un intervalle. On a par exemple :

$$-1 < 1 \text{ mais } f(-1) > f(1).$$

Démonstration : Dérivée de la fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$.

• On considère un nombre réel non nul quelconque $a \neq 0$. Nous allons montrer que f est dérivable en a.

• Pour un pas $h > 0$, calculons le taux d'accroissement entre a et $a + h$

$$\tau_a(h) = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a-(a+h)}{(a+h)a}}{h} = \frac{a-a-h}{(a+h)a} \times \frac{1}{h} = \frac{-h}{(a+h)a} \times \frac{1}{h} = -\frac{1}{(a+h)a}$$

• Lorsque h se rapproche de 0, $\tau_a(h) = -\frac{1}{(a+h)a}$ se rapproche du nombre réel $-\frac{1}{a^2}$.

• La fonction f est donc dérivable en a et on a donc $f'(a) = \lim_{h \to 0} \tau_a(h) = -\frac{1}{a^2}$.

• Comme a est un nombre réel non nul quelconque, la fonction inverse est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$