Fiche F2.1 : Taux de variation

1 – Définition

On considère une fonction f définie sur un intervalle I ainsi que deux nombres a et b de I

Définition 1 : On appelle **taux d'accroissement** de f entre a et b le nombre $\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

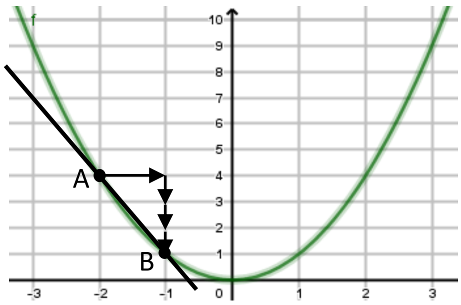
Remarque : Soient A et B les points de la courbe de f d'abscisses respectives a et b. Graphiquement, le taux d'accroissement de f entre a et b correspond alors au coefficient directeur de la droite (AB).

En effet, le coefficient directeur de la droite (AB) est égal à $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Exemple 1 : Soit f la fonction carré.

1) Calculer le taux d'accroissement de la fonction f entre 1 et 3.

$\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{3^2-1^2}{3-1} = \frac{9-1}{2} = \frac{8}{2} = 4$

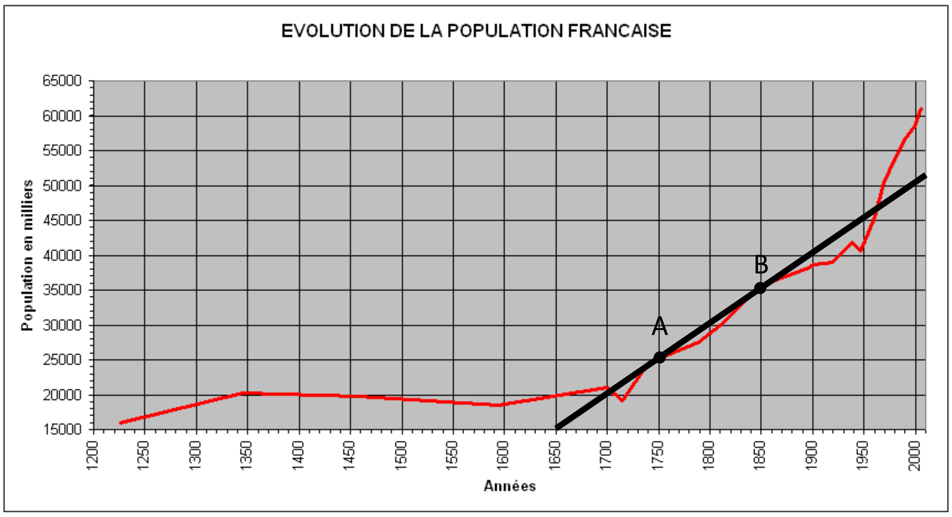


2) Déterminer graphiquement le taux d'accroissement de f entre -2 et -1.

On place les points A et B de la courbe d'abscisses respectives -2 et -1.

Il s'agit du coefficient directeur de la droite (AB) : $\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = -3$.

Exemple 2 : La courbe f ci-dessous représente l'évolution de la population française entre 1200 et 2000.



1) Déterminer le taux d'accroissement de la population française pour les valeurs suivantes. Interpréter ces résultats.

a. Entre 1400 et 1600 : $\frac{f(1600)-f(1400)}{1600-1400} = \frac{18\,000 - 20\,000}{200} = -10$.

La population française a perdu en moyenne 10 milliers d'habitants par an entre 1400 et 1600.

b. Entre 1850 et 1900 : $\frac{f(1900)-f(1850)}{1900-1850} = \frac{39\,000 - 36\,000}{50} = 60$.

La population française a gagné en moyenne 60 milliers d'habitants par an entre 1850 et 1900.

c. Entre 1950 et 2000 : $\frac{f(2000)-f(1950)}{2000-1950} = \frac{59\,000 - 42\,000}{50} = 340$.

La population française a gagné en moyenne 340 milliers d'habitants par an entre 1850 et 1900.

2) Estimer graphiquement le taux d'accroissement de la population française entre 1750 et 1850.

On place les points A et B de la courbe d'abscisses respectives 1750 et 1850.

Le taux d'accroissement est égal au coefficient de la droite (AB) est égal à $\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{10\,000}{100} = 100$.

2 – Lien avec le sens de variation

Propriété 1 : On considère une fonction f définie sur un intervalle I ainsi que deux nombres a et b de I

● Si f est croissante sur I alors le taux d'accroissement de f entre a et b est **positif.**

● Si f est décroissante sur I alors le taux d'accroissement de f entre a et b est **négatif.**

Exemple 3 : Reprenons l'exemple précédent.

● La population française est croissante sur l'intervalle $I = [1750; 1900]$ donc le taux d'accroissement entre 1850 et 1900 est positif.

● La population française est décroissante sur l'intervalle $I = [1350; 1600]$ donc le taux d'accroissement entre 1400 et 1600 est négatif.

Remarque : La réciproque de la propiété précédente n'est pas vrai.

Exemple 4 : Soit f la fonction carré.

Le taux d'accroissement entre -1 et 2 : $\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{2^2-(-1)^2}{2+1} = \frac{4-1}{3} = \frac{3}{3} = 1$ est positif.

Mais la fonction carré n'est pas croissante sur l'intervalle $[-2; 1]$.

3 – Taux de variation d'une fonction affine

Propriété 2 : Le taux de variation d'une fonction affine entre deux nombres a et b est constant égal à son coefficient directeur.

Remarque : En effet, une fonction affine est représenté par une droite dont la pente est constante. Réciproquement si une fonction a un taux de variation constant alors elle est affine de coefficient directeur égal à ce taux de variation.

Exemple 5 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 1$. Montrer que le taux de variation de f est constant.

Pour tous nombres réels a et b, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{3b+1-(3a+1)}{b-a} = \frac{3b+1-3a-1}{b-a} = \frac{3b-3a}{b-a} = \frac{3(b-a)}{b-a} = 3$.

Le taux de variation de f est donc constant égal à 3 (qui est le coefficient directeur de f).