

Fiche F2.2 : Nombre dérivé

1 – Définition du nombre dérivé

On considère une fonction f définie sur un intervalle I

Soit a un nombre réel de I et soit un **pas** $h > 0$. On note $\tau_a(h)$ le taux d'accroissement entre a et $a + h$:

$$\tau_a(h) = \underline{\hspace{10cm}}$$

Définition 1 :

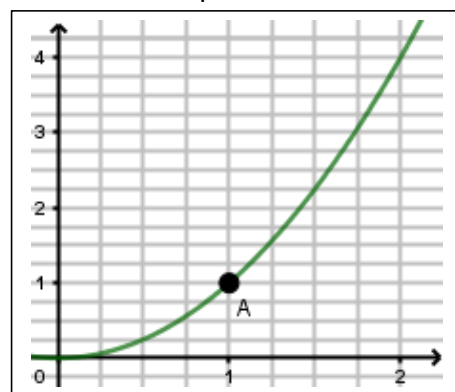
Remarque : On note alors $\underline{\hspace{10cm}}$

Exemple 1 : Soit f la fonction carré dont on a tracé ci-dessous une partie de sa courbe représentative.

1) Déterminer graphiquement le taux d'accroissement de f en $a = 1$,
pour un pas de :

- $h = 1$:
- $h = 0.5$:

2) Déterminer par le calcul $\tau_1(0.1)$:



3) Montrer que pour un pas $h > 0$ quelconque, le taux de la fonction carré est donnée par $\tau_1(h) = 2 + h$.

4) Compléter alors le tableau suivant :

h	1	0.5	0.1	0.01	0.001
$\tau_1(h)$					

5) En déduire que la fonction carré est dérivable en 1, et déterminer le nombre dérivée $f'(1)$

Propriété 1 :

Démonstration : Soit $f(x) = \sqrt{x}$

• Soit $h > 0$. Calculons le taux d'accroissement de f en $a = 0$: $\underline{\hspace{10cm}}$

• Compléter tableau suivant qui donne l'évolution de $\tau_0(h)$ en fonction de h

h	1	0.5	0.1	0.01	0.001
$\tau_0(h)$					

• Lorsque h se rapproche de 0, $\tau_0(h)$ devient $\underline{\hspace{10cm}}$:

Plus h se rapproche de 0, plus \sqrt{h} sera $\underline{\hspace{2cm}}$ et donc plus $\frac{1}{\sqrt{h}}$ sera $\underline{\hspace{2cm}}$. On a donc $\lim_{h \rightarrow 0} \tau_0(h) = \underline{\hspace{2cm}}$.

• $\tau_0(h)$ ne tend pas vers un nombre réel : La fonction racine carré $\underline{\hspace{10cm}}$.



2 – Nombre dérivé et tangente

Interprétation graphique : Soit f une fonction dérivable en a

- On note A le point de la courbe de f d'abscisse a .
- Pour un pas $h > 0$, soit M le point de la courbe de f d'abscisse $a + h$.
- La droite (AM) a pour coefficient directeur le taux d'accroissement entre a et $a + h$: $\tau_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

➤ Que se passe-t-il lorsque h se rapproche de 0 ?

- Le point M se rapproche de A , et la droite (AM) se rapproche d'une « position limite » appelée **tangente** à la courbe de f en a , et notée T_a .
- La pente de cette tangente est donc « la valeur limite » de la pente de la droite (AM) , c'est-à-dire de $\tau_a(h)$, quand h tend vers 0.
- Mais, par définition, cette valeur limite de $\tau_a(h)$ est égal à $f'(a)$

$$\text{Pente de } T_a = \lim_{h \rightarrow 0} \text{Pente de } (AM) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau_a(h) = f'(a)$$

Définition 2 :

Remarque : La tangente T_a est la droite qui passe au plus près de la courbe de f autour de a : Elle « frôle » la courbe et la « touche » en A .

Propriété 2 :

Exemple 2 : Soit f la fonction carré (Fig 4). Déterminer graphiquement $f'(1) =$

Remarque : La fonction racine carré (Fig 5) n'est pas dérivable en 0. Sa tangente T_0 est verticale (donc elle n'a pas de coefficient directeur)

Propriété 3 :

Exemple 3 : La tangente T_1 a la fonction carré a pour équation

$$T_1: y = f'(1)(x - 1) + f(1). \text{ Or } f'(1) = 2 \text{ et } f(1) = 1^2 = 1$$

On a donc $T_1: y = 2(x - 1) + 1$ c'est-à-dire $T_1: y = 2x - 1$

Démonstration : La tangente T_a a une équation de la forme $y = mx + p$.

- On sait que le coefficient directeur m de T_a est égal à _____. L'équation est de la forme $y =$ _____
- Pour trouver l'ordonnée à l'origine p , on utilise le fait que $A(\underbrace{a}_x; \underbrace{f(a)}_y) \in T_a$.
- On obtient _____ d'où _____.
- Finalement T_a a pour équation _____ c'est à dire _____

