

Fiche F2.2 : Nombre dérivé

1 – Définition du nombre dérivé

On considère une fonction f définie sur un intervalle I

Soit a un nombre réel de I et soit un **pas** $h > 0$. On note $\tau_a(h)$ le taux d'accroissement entre a et $a + h$:

$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Définition 1 : On dit que f est **dérivable** en a , lorsque le taux d'accroissement $\tau_a(h)$ tend vers un nombre réel lorsque h tend vers 0. Ce nombre est appelé **nombre dérivé de f en a** et est noté $f'(a)$.

Remarque : On note alors $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau_a(h)$.

Exemple 1 : Soit f la fonction carré dont on a tracé ci-dessous une partie de sa courbe représentative.

- 1) Déterminer graphiquement le taux d'accroissement de f en $a = 1$, pour un pas de :

- $h = 1 : \tau_1(1) = \frac{f(1+1)-f(1)}{1} = \frac{f(2)-f(1)}{1} = \frac{4-1}{1} = 3$
- $h = 0.5 : \tau_1(0.5) = \frac{f(1+0.5)-f(1)}{0.5} = \frac{f(1.5)-f(1)}{0.5} = \frac{2.25-1}{0.5} = 2.5$

- 2) Déterminer par le calcul $\tau_1(0.1)$:

$$\tau_1(0.1) = \frac{f(1+0.1)-f(1)}{0.1} = \frac{f(1.1)-f(1)}{0.1} = \frac{1.1^2-1^2}{0.1} = \frac{1.21-1}{0.1} = 2.1$$

- 3) Montrer que pour un pas $h > 0$ quelconque, le taux de la fonction carré est donnée par $\tau_1(h) = 2 + h$.

$$\tau_1(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \frac{1^2+2h+h^2-1}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2 + h$$

- 4) Compléter alors le tableau suivant :

h	1	0.5	0.1	0.01	0.001
$\tau_1(h)$	3	2.5	2.1	2.01	2.001

- 5) En déduire que la fonction carré est dérivable en 1, et déterminer le nombre dérivée $f'(1)$

Lorsque h se rapproche de 0, le taux d'accroissement $\tau_1(h)$ de la fonction carré en 1 se rapproche de 2.

On a donc $\lim_{h \rightarrow 0} \tau_1(h) = \lim_{h \rightarrow 0} 2 + h = 2 + 0 = 2$. La fonction carré est donc dérivable en 1, et $f'(1) = 2$.

Propriété 1 : La fonction racine carré n'est pas dérivable en 0.

Démonstration : Soit $f(x) = \sqrt{x}$

- Soit $h > 0$. Calculons le taux d'accroissement de f en $a = 0$: $\tau_0(h) = \frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h} \times \sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{h}}$
- Le tableau suivant donne l'évolution de $\tau_0(h)$ en fonction de h

h	1	0.5	0.1	0.01	0.001
$\tau_0(h)$	1	≈ 1.41	≈ 3.16	10	≈ 31.62

- Lorsque h se rapproche de 0, $\tau_0(h)$ devient de plus en plus grand, aussi grand que l'on veut :

Plus h se rapproche de 0, plus \sqrt{h} sera petit et donc plus $\frac{1}{\sqrt{h}}$ sera grand. On a donc $\lim_{h \rightarrow 0} \tau_0(h) = +\infty$.

- $\tau_0(h)$ ne tend pas vers un nombre réel : La fonction racine carré n'est donc pas dérivable en 0.



2 – Nombre dérivé et tangente

Interprétation graphique : Soit f une fonction dérivable en a

- On note A le point de la courbe de f d'abscisse a .
- Pour un pas $h > 0$, soit M le point de la courbe de f d'abscisse $a + h$.
- La droite (AM) a pour coefficient directeur le taux d'accroissement entre a et $a + h$: $\tau_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

➤ Que se passe-t-il lorsque h se rapproche de 0 ?

- Le point M se rapproche de A , et la droite (AM) se rapproche d'une « position limite » appelée **tangente** à la courbe de f en a , et notée T_a .
- La pente de cette tangente est donc « la valeur limite » de la pente de la droite (AM) , c'est-à-dire de $\tau_a(h)$, quand h tend vers 0.
- Mais, par définition, cette valeur limite de $\tau_a(h)$ est égal à $f'(a)$

$$\text{Pente de } T_a = \lim_{h \rightarrow 0} \text{Pente de } (AM) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau_a(h) = f'(a)$$

Définition 2 : On appelle **tangente à la courbe de f en a** et on note T_a la position limite de la droite (AM) lorsque h tend vers 0.

Remarque : La tangente T_a est la droite qui passe au plus près de la courbe de f autour de a : Elle « frôle » la courbe et la « touche » en A .

Propriété 2 : Lorsque f est **dérivable** en a , $f'(a)$ est égal au coefficient directeur de la tangente T_a

Exemple 2 : Soit f la fonction carré (Fig 4). Déterminer graphiquement $f'(1) = \text{coefficient directeur de } T_1 = 2$.

Remarque : La fonction racine carré (Fig 5) n'est pas dérivable en 0. Sa tangente T_0 est verticale (donc elle n'a pas de coefficient directeur)

Propriété 3 : Lorsque f est **dérivable** en a , la tangente T_a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Exemple 3 : La tangente T_1 de la fonction carré a pour équation

$$T_1: y = f'(1)(x - 1) + f(1). \text{ Or } f'(1) = 2 \text{ et } f(1) = 1^2 = 1$$

On a donc $T_1: y = 2(x - 1) + 1$ c'est-à-dire $T_1: y = 2x - 1$

Démonstration : La tangente T_a a une équation de la forme $y = mx + p$.

- On sait que le coefficient directeur m de T_a est égal à $f'(a)$. L'équation est de la forme $y = f'(a)x + p$.
- Pour trouver l'ordonnée à l'origine p , on utilise le fait que $A(\underbrace{a}_x; \underbrace{f(a)}_y) \in T_a$.
- On obtient $f(a) = f'(a)a + p$ d'où $p = -f'(a)a + f(a)$.
- Finalement T_a a pour équation $y = f'(a)x - f'(a)a + f(a)$ c'est à dire $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

