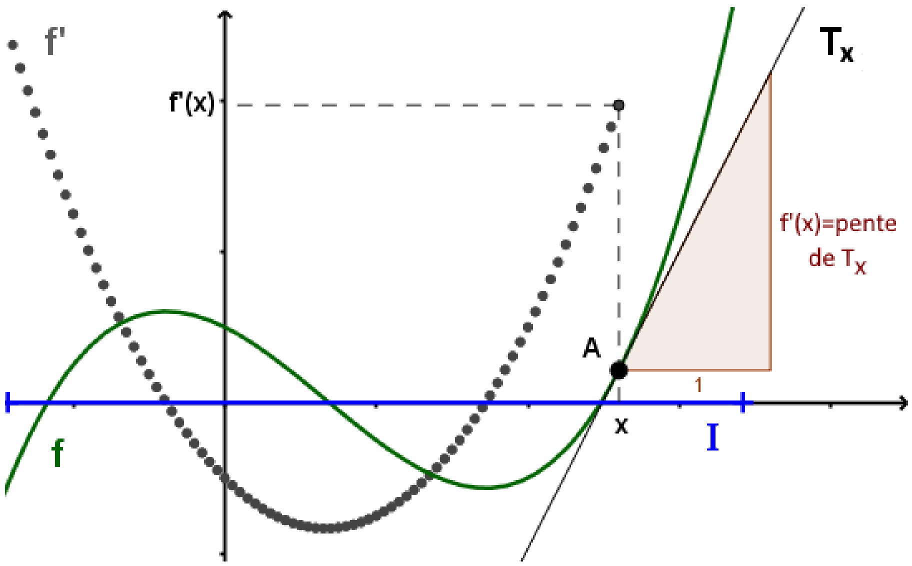
Fiche F3.1 : Fonction dérivée

1 – Dérivée d'une fonction f

Définition 1 : On dit que f est dérivable sur l'intervalle I, si f est dérivable en tout nombre a de I.

Définition 2 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On appelle **fonction dérivée** de f, la fonction noté f' définie sur I, qui à chaque nombre x de I, associe le nombre dérivée $f'(x)$

Interprétation graphique : La dérivée f' est la fonction qui associe, à chaque x de I, la pente de la courbe de f en x, c'est-à-dire le coefficient de la tangente T à la courbe de f en x.



2 – Dérivées des fonctions usuelles

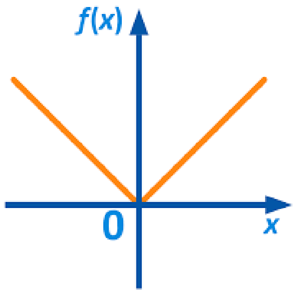
Fonction f	Fonction dérivée f'	Intervalle de dérivabilité
$f(x) = c$ (constante)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ (avec n entier, $n \geq 2$)	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (ou $\mathbb{R}^*$)
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \lvert x \rvert$	$f'(x) = 1$ si $x > 0$ $f'(x) = -1$ si $x < 0$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (ou $\mathbb{R}^*$)

Remarques :

• La fonction inverse n'est pas dérivable en 0, car elle n'est pas définie en ce nombre.

• La fonction racine carré n'est pas dérivable en 0, la tangente T_0 à sa courbe en 0 est verticale, et ne possède donc pas de coefficient directeur.

• La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0, car elle n'admet pas de tangente T_0



Démonstration : Dérivée de la fonction carrée $f(x) = x^2$.

• On considère un nombre réel quelconque $a \in \mathbb{R}$. Nous allons montrer que f est dérivable en a.

• Pour un pas $h > 0$, calculons le taux d'accroissement entre a et $a + h$

$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h$$

• Lorsque h se rapproche de 0, $\tau_a(h)$ se rapproche du nombre réel $2a$.

• La fonction f est donc dérivable en a et on a donc $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \tau_a(h) = 2a$.

• Comme a est un nombre réel quelconque, la fonction carré est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = 2x$.

Démonstration : Dérivée de la fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$.

• On considère un nombre réel non nul quelconque $a \neq 0$. Nous allons montrer que f est dérivable en a.

• Pour un pas $h > 0$, calculons le taux d'accroissement entre a et $a + h$

$$\tau_a(h) = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a-(a+h)}{(a+h)a}}{h} = \frac{a - a - h}{(a+h)a} \times \frac{1}{h} = \frac{-h}{(a+h)a} \times \frac{1}{h} = -\frac{1}{a^2 + ah}$$

• Lorsque h se rapproche de 0, $\tau_a(h)$ se rapproche du nombre réel $-\frac{1}{a^2}$.

• La fonction f est donc dérivable en a et on a donc $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \tau_a(h) = -\frac{1}{a^2}$.

• Comme a est un nombre réel non nul quelconque, la fonction inverse est donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$