Fiche ___ : Opérations sur les dérivées

1 – Addition, Multiplication par un nombre

Propriété 1 : On considère u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un nombre réel.

•

•

Remarque : Si $f = u - v$ alors $f =$ ____________ et on a donc $f' =$ ___________________________.

Exemple 1 : Dériver les fonctions suivantes :

• $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$.

• $g(x) = 3x^{10}$

• $h(x) = \frac{1}{x} - x^3$

Exemple 2 : Dériver les polynômes suivants :

• $f(x) = 3x^3 - x^2 + 5x + 1$.

• $g(x) = \frac{1}{2}x^{10} - \frac{2}{3}x^6 - x$.

2 – Dérivée d'un produit

Propriété 2 : On considère u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Démonstration : On considère la fonction $f(x) = u(x) \times v(x)$.

• Soit a un réel quelconque de I. Pour un pas $h > 0$, calculons le taux d'accroissement entre a et $a + h$:

$\tau_a(h) =$

• On va faire apparaître les taux d'accroissement de u et v en a.

Pour cela, on ajoute et retranche $u(a) \times v(a + h)$ au numérateur :

$\tau_a(h) =$

$\tau_a(h) =$

• Comme u et v sont dérivables en a, $\lim\limits_{h\to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} =$ ______ et $\lim\limits_{h\to 0} \frac{v(a+h)-v(a)}{h} =$ ______ .

• Le nombre $u(a)$ ne dépend de h donc $\lim\limits_{h\to 0} u(a) =$ _____ et on admet que $\lim\limits_{h\to 0} v(a + h) =$ _____ .

• On obtient donc $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \tau_a(h) =$ ______________________________ et f est donc dérivable en a.

• La fonction $f(x) = u(x) \times v(x)$ est donc dérivable sur I et on a $f'(x) =$ ________________________.

Exemple 3 : Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$

Corollaire 1 :

Démonstration : On a $f = u^2 =$ ______. Ainsi, d'après la propriété précédente on a $f' =$ ________________.

Exemple 4 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x+5)^2$

3 – Dérivée d'un quotient

Propriété 3 : On considère u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I avec $v(x) \neq 0$ sur I.

Exemple 5 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$

Corollaire 3 :

Démonstration : On a $f = \frac{u}{v}$ avec $u =$ ____. On a donc $u' =$ ___ . Ainsi, on a $f' =$ ____________________

Exemple 6 : Soit f la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{4-2x}$

4 – Dérivée d'une fonction composée

Propriété 4 :

Exemple 7 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (5x+8)^4$