Fiche F3.2 : Opérations sur les dérivées

1 – Addition, Multiplication par un nombre

Propriété 1 : On considère u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un nombre réel.

- Si $f = u + v$ alors f est dérivable sur I et on a $f' = u' + v'$
- Si $f = k \times u$ alors f est dérivable sur I et on a $f' = k \times u'$.

Remarque : Si $f = u - v$ alors $f = u + (-1) \times v$ et on a donc $f' = u' + (-1) \times v' = u' - v'$.

Exemple 1 : Dériver les fonctions suivantes :

- $f(x) = \underbrace{x^2}_{u} + \underbrace{\sqrt{x}}_{v}$. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a $f' = u' + v'$ c'est à dire $f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- $g(x) = \underbrace{3}_{k}\ \underbrace{x^{10}}_{u}$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $g' = k \times u'$ c'est à dire $g'(x) = 3 \times 10x^9 = 30x^9$.
- $h(x) = \underbrace{\frac{1}{x}}_{u} - \underbrace{x^3}_{v}$ h est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et on a $h' = u' - v'$ c'est à dire $h'(x) = -\frac{1}{x^2} - 3x^2$.

Exemple 2 : Dériver les polynômes suivants :

- $f(x) = 3x^3 - x^2 + 5x + 1$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3 \times 3x^2 - 2x + 5 \times 1 + 0 = 9x^2 - 2x + 5$.
- $g(x) = \frac{1}{2}x^{10} - \frac{2}{3}x^6 - x$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = \frac{1}{2} \times 10x^9 - \frac{2}{3} \times 6x^5 - 1 = 5x^9 - 4x^5 - 1$.

2 – Dérivée d'un produit

Propriété 2 : On considère u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Si $f = u \times v$ alors f est dérivable sur I et on a $f' = u'v + v'u$

Démonstration : On considère la fonction $f(x) = u(x) \times v(x)$.

- Soit a un réel quelconque de I. Pour un pas $h > 0$, calculons le taux d'accroissement entre a et $a + h$:

$$\tau_a(h) = \frac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a) \times v(a)}{h}$$

- On va faire apparaître les taux d'accroissement de u et v en a.

  Pour cela, on ajoute et retranche $u(a) \times v(a + h)$ au numérateur :

$$\tau_a(h) = \frac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a) \times v(a+h) + u(a) \times v(a+h) - u(a) \times v(a)}{h}.$$

$$\tau_a(h) = \underbrace{\frac{u(a+h) - u(a)}{h}}_{taux\ d'accroissement\ de\ u} \times v(a+h) + u(a) \times \underbrace{\frac{v(a+h) - v(a)}{h}}_{taux\ d'accroissement\ de\ v}$$

- Comme u et v sont dérivables en a, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$ et $\lim\limits_{h \to 0} \frac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a)$.
- Le nombre $u(a)$ ne dépend de h donc $\lim\limits_{h \to 0} u(a) = u(a)$ et on admet que $\lim\limits_{h \to 0} v(a + h) = v(a)$.
- On obtient donc $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \tau_a(h) = u'(a) \times v(a) + u(a) \times v'(a)$ et f est donc dérivable en a.
- La fonction $f(x) = u(x) \times v(x)$ est donc dérivable sur I et on a $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

Exemple 3 : Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$

On a $f = u \times v$ avec $\begin{cases} u = x \\ u' = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} v = \sqrt{x} \\ v' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$. f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on a $f' = u'v + v'u$.

On obtient $f'(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \times x = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}{2\times\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

Corollaire 1 : Si $f = u^2$ alors f est dérivable sur I et on a $f' = 2u'u$

Démonstration : On a $f = u^2 = u \times u$. Ainsi, d'après la propriété précédente on a $f' = u'u + u'u = 2u'u$.

Exemple 4 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x+5)^2$

On a $f = u^2$ avec $\begin{cases} u = 3x + 5 \\ u' = 2 \end{cases}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f' = 2u'u$.

On obtient $f'(x) = 2 \times 3 \times (3x+5) = 6(3x+5) = 18x + 30$.

3 – Dérivée d'un quotient

Propriété 3 : On considère u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I avec $v(x) \neq 0$ sur I.

Si $f = \frac{u}{v}$ alors f est dérivable sur I et on a $f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

Exemple 5 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$

On a $f = \frac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u = 3x \\ u' = 3 \end{cases}$ et $\begin{cases} v = x^2 + 1 \\ v' = 2x \end{cases}$. $x^2 + 1 \neq 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

On obtient $f'(x) = \frac{3\times(x^2+1) - 2x\times 3}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^2 - 6x + 3}{(x^2+1)^2}$

Corollaire 3 : Si $f = \frac{1}{v}$ alors f est dérivable sur I et on a $f' = -\frac{v'}{v^2}$

Démonstration : On a $f = \frac{u}{v}$ avec $u = 1$. On a donc $u' = 0$. Ainsi, on a $f' = \frac{0\times v - v'\times 1}{v^2} = -\frac{v'}{v^2}$

Exemple 6 : Soit f la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{4-2x}$

On a $f = \frac{1}{v}$ avec $\begin{cases} v = 4 - 2x \\ v' = -2 \end{cases}$. $4 - 2x \neq 0$ sur $]2;+\infty[$ donc f est dérivable sur $]2;+\infty[$ et on a $f' = \frac{-v'}{v^2}$.

On obtient $f'(x) = -\frac{-2}{(4-2x)^2} = \frac{2}{(4-2x)^2}$.

4 – Dérivée d'une fonction composée

Propriété 4 : Soit g une fonction dérivable sur un intervalle I. Si $f(x) = g(ax+b)$ alors la fonction f est dérivable pour tout x tel que $ax + b \in I$ et on a $f'(x) = a \times g'(ax+b)$

Exemple 7 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (5x+8)^4$

On a $f(x) = g(ax+b)$ avec $a = 5$, $b = 8$ et $g(x) = x^4$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $g'(x) = 4x^3$.

f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a : $f'(x) = a \times g'(ax+b) = 5 \times 4(5x+8)^3 = 20(5x+8)^3$.