Fiche F3.2 : Propriétés algébriques

1 – Règles de calcul

Les règles de calculs avec les puissances entières s'étendent au cas où l'exposant est un nombre réel.

Propriété 1 : Soient a un réel strictement positif, x, y deux nombres réels et n un entier. On a :

• $a^{x+y} = a^x \times a^y$ • $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$ •$(a^x)^n = a^{nx}$

Exemple 1 : Simplifier les expressions suivantes :

• $a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$

• $\frac{a^2}{a^3} = a^{2-3} = a^{-1} = \frac{1}{a}$

• $a^{3.5} \times a^{-8} = a^{3.5-8} = a^{-4.5} = \frac{1}{a^{4.5}}$

• $\frac{a^{10.5}}{a^{6.4}} = a^{10.5-8.4} = a^{2.1}$

• $(a^{2.5})^{10} = a^{2.5\times10} = a^{25}$

Exemple 2 : Déterminer une valeur exacte des nombres suivants :

• $\frac{(2^4)^5 \times 2^{-17}}{2\times(2^{-2})^4} = \frac{2^{4\times5} \times 2^{-17}}{2^1\times2^{-2\times4}} = \frac{2^{20} \times 2^{-17}}{2^1\times2^{-8}} = \frac{2^{20-17}}{2^{1-8}} = \frac{2^3}{2^{-7}} = 2^{3-(-7)} = 2^{10} = 1024$

• $\frac{3^{2.5}\times3^{6.3}}{(3^{2.2})^4} = \frac{3^{2.5+6.3}}{3^{2.2\times4}} = \frac{3^{8.8}}{3^{8.8}} = 3^{8.8-8.8} = 3^0 = 1$

• $\left(10^{\frac{1}{4}}\right)^3 \times 10^{\frac{1}{2}} \times 10^{-1} = 10^{3\times\frac{1}{4}} \times 10^{\frac{1}{2}} \times 10^{-1} = 10^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-1} = 10^{\frac{3}{4}+\frac{2}{4}-\frac{4}{4}} = 10^{\frac{1}{4}}$

2 – Equation $x^n = a$

Propriété 1 : Soient a un réel strictement positif et n un entier supérieur ou égal à 2. L'équation $x^n = a$ possède une unique solution **positive,** appelé racine $n-ième$ de a, noté $\sqrt[n]{a}$ et qui vaut $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Remarques :

• On peut vérifier que $a^{\frac{1}{n}}$ est bien solution de cette équation : $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{n\times\frac{1}{n}} = a^1 = a.$

• La racine $2-ième$ de a $\sqrt[2]{a}$ est appelé « racine carrée de a » et noté $\sqrt{a}$.

• Pour tout réel $a > 0$, on a donc $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = a^{0.5}$.

• Lorsque n est pair, l'équation $x^n = a$ possède également la solution négative opposée $-\sqrt[n]{a}$

Exemple 3 : Résoudre dans $[0; +\infty[$ les équations suivantes :

• $x^2 = 225$. La solution positive est la racine carré de 225 : $\sqrt{225} = 15$. La solution négative est -15.

• $x^3 = 27$. La solution positive est la racine cubique de 27 : $\sqrt[3]{27} = 27^{\frac{1}{3}} = 3$. Il n'y a pas de solution négative.

• $x^4 = 16$. La solution positive est la racine $4-ième$ de 16 : $\sqrt[4]{16} = 16^{\frac{1}{4}} = 2$. La solution négative est -2.