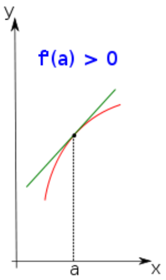
Fiche F3.3 : Application de la dérivation

1 – Dérivée et sens de variation

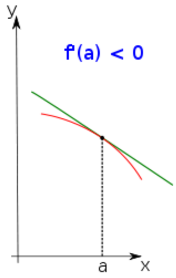
Propriété 1 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est **croissante** sur I si et seulement si la dérivée f' est **positive** sur I.
- La fonction f est **décroissante** sur I si et seulement si la dérivée f' est **négative** sur I.
- La fonction f est **constante** sur I si et seulement si la dérivée f' est **nulle** sur I.

Explication :



Dire que f' est positive sur I signifie que la « pente » de la courbe est positive en tout point a de I. La fonction est donc croissante sur I.



Dire que f' est négative sur I signifie que la « pente » de la courbe est négative en tout point a de I. La fonction est donc décroissante sur I.

Exemple 1 : Réaliser le tableau de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = 2x^2 - 12x + 5$.

On commence par dériver la fonction f : $f'(x) = 4x - 12$

f' est une fonction affine, elle s'annule en $x_0 = -\frac{b}{a} = -\frac{-12}{4} = 3$ et $a = 4 > 0$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	-13	↗	

$f(3) = 2 \times 3^2 - 12 \times 3 + 5 = 18 - 36 + 5 = -13$

Exemple 2 : Réaliser le tableau de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = x^3 - 1.5x^2 - 6x + 2$.

On commence par dériver la fonction f : $f'(x) = 3x^2 - 1.5 \times 2x - 6 = 3x^2 - 3x - 6$

f' est un polynôme du second degré. Pour avoir son tableau de signe on doit d'abord trouver ses racines.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 3 \times (-6) = 81$; $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-9}{6} = -1$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+9}{6} = 2$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	5.5	↘	-8	↗	

$f(-1) = (-1)^3 - 1.5 \times (-1)^2 - 6 \times (-1) + 2 = -1 - 1.5 + 6 + 2 = 5.5$

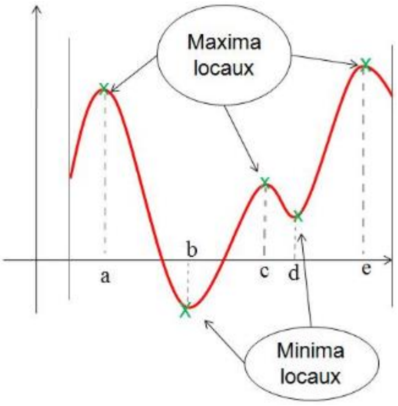
$f(2) = (2)^3 - 1.5 \times (2)^2 - 6 \times 2 + 2 = 8 - 6 - 12 + 2 = -8$

2 – Dérivée et extremums locaux

Définition 1 :

• On dit que f admet **maximum local** en a, si au voisinage de a, $f(a)$ est la plus grande des images.

• On dit que f admet **minimum local** en a, si au voisinage de a, $f(a)$ est la plus petite des images.

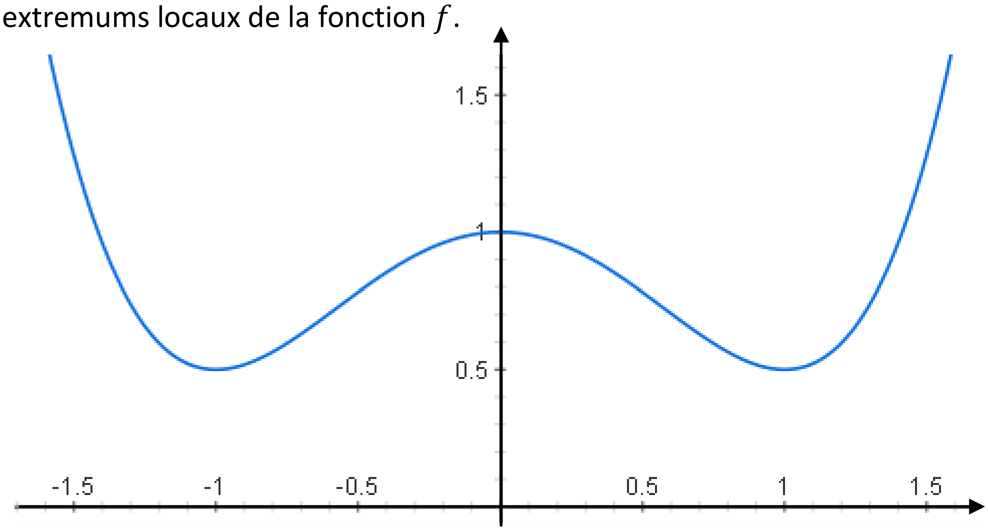


• La fonction a trois maximums locaux : En a, c et e.

• La fonction a deux minimums locaux : En b et d.

Exemple 3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est tracée ci-dessous.

Déterminer les extremums locaux de la fonction f.



• La fonction admet un maximum local en 0 qui vaut 1.

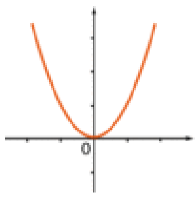
• La fonction admet un minimum local en -1 et en 1 qui vaut 0.5.

Propriété 2 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un nombre de I. La fonction f admet un extremum local en a si et seulement si la dérivée f' s'annule en a en changeant de signe.

Exemple : Fonction carré → $f(x) = x^2$

On a $f'(x) = 2x$

x	$-\infty$ $\quad 0 \quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$ $\;0\;$ $+$



La dérivée f' s'annule en changeant de signe en 0.

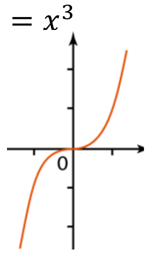
La fonction carré admet un extremum local en 0 :

Il s'agit d'un minimum local.

Contre-exemple : Fonction cube → $f(x) = x^3$

On a $f'(x) = 3x^2$

x	$-\infty$ $\quad 0 \quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$ $\;0\;$ $+$



La dérivée f' s'annule sans changer de signe en 0.

La fonction cube n'admet pas d'extremum local en 0.