

## Fiche F4.2 : Propriétés algébriques

### 1 – Règles de calcul

Le logarithme est une fonction qui transforme les produits en sommes.

Propriété 1 (Propriété fondamentale des logarithmes) :

Pour tout nombres réels strictement positifs  $a$  et  $b$ , on a  $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$

Exemple 1 : Ecrire les logarithmes suivants comme somme de logarithmes de nombres premiers :

$$\bullet \log(6) = \log(2 \times 3) = \log 2 + \log 3 \qquad \bullet \log(35) = \log(5 \times 7) = \log 5 + \log 7$$

Exemple 2 : Calculer sans calculatrice :  $\log 2 + \log 5 = \log(2 \times 5) = \log(10) = 1$

Exemple 3 : Exprimer  $\log(a^3)$  en fonction de  $\log(a)$  :

$$\log(a^3) = \log(a \times a \times a) = \log a + \log a + \log a = 3 \log a.$$

Propriété 2 : Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels strictement positif,  $n$  un entier naturel et  $x$  un réel. On a :

$$(1) \log(a^n) = n \log a$$

$$(2) \log(a^x) = x \log a$$

$$(3) \log\left(\frac{1}{b}\right) = -\log b$$

$$(4) \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

Exemple 4 : Ecrire ces logarithmes comme combinaisons linéaires de logarithmes de nombres premiers :

$$\bullet \log(16) = \log(2^4) = 4 \log 2$$

$$\bullet \log(\sqrt{5}) = \log(5^{0.5}) = \frac{1}{2} \log 5$$

$$\bullet \log(72) = \log(2^3 \times 3^2) = 3 \log 2 + 2 \log 3$$

$$\bullet \log\left(\frac{1}{3}\right) = -\log 3$$

$$\bullet \log\left(\frac{11}{13}\right) = \log 11 - \log 13$$

$$\bullet \log(2.5) = \log\left(\frac{5}{2}\right) = \log 5 - \log 2$$

$$\bullet \log\left(\frac{14}{25}\right) = \log 14 - \log 25 = \log(2 \times 7) - \log(5^2) = \log(2) + \log(7) - 2 \log(5)$$

### 2 – Application à la résolution des équations (et inéquations) du type $x^a = b$ et $a^x = b$

Méthode : Pour résoudre ce type d'équation on applique le logarithme des deux côtés de l'équation ou de l'inéquation afin de faire « descendre » la puissance.

Exemple 5 : Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$\bullet 2^x = 10 :$$

$$\Leftrightarrow \log 2^x = \log 10$$

$$\Leftrightarrow x \log 2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\log 2} \approx 3.32$$

$$S = \left\{ \frac{1}{\log 2} \right\}$$

$$\bullet x^{0.1} = 5 :$$

$$\Leftrightarrow \log x^{0.1} = \log 5$$

$$\Leftrightarrow 0.1 \log x = \log 5 \quad (\times 10)$$

$$\Leftrightarrow \log x = 10 \log 5 = \log(5^{10})$$

$$\Leftrightarrow x = 5^{10}$$

$$S = \{5^{10}\}$$

$$\bullet 0.7^x < 0.2 :$$

$$\Leftrightarrow \log 0.7^x < \log 0.2$$

$$\Leftrightarrow x \log 0.7 < \log 0.2$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{\log 0.2}{\log 0.7} \approx 4.5 \quad \begin{array}{l} \div \log(0.7) < 0 \\ \text{Changement de} \\ \text{signe} \end{array}$$

$$S \approx ]4.5; +\infty[$$

