

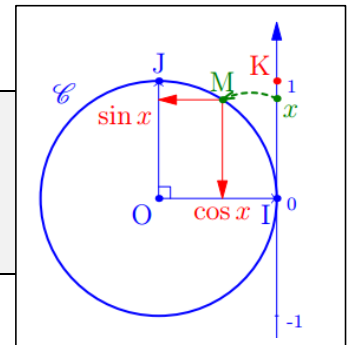
Fiche G1.2 : Cosinus et Sinus d'un nombre réel

1 – Définition et valeurs remarquables

Dans le repère orthonormé $(O; I, J)$, on considère le cercle trigonométrique

Définition 1 : Soit x un réel et M le point du cercle trigonométrique associé à x .

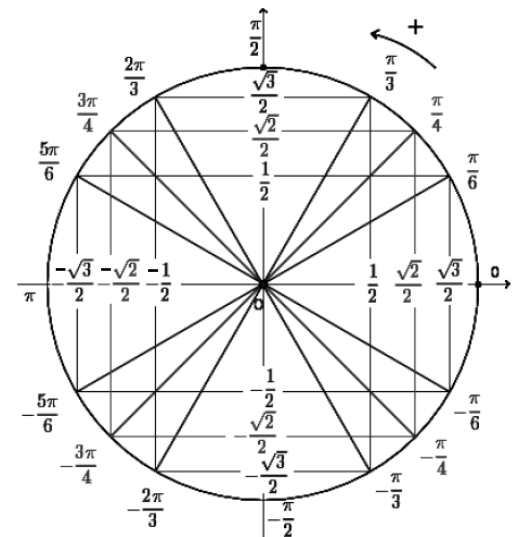
- On appelle **cosinus** du réel x et note $\cos(x)$, l'**abscisse** du point M
- On appelle **sinus** du réel x et note $\sin(x)$, l'**ordonnée** du point M



Remarque : Le point M a donc pour coordonnées : $M(\cos(x); \sin(x))$

Valeurs remarquables à connaître :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



- $\cos(\pi) = -1$
- $\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$
- $\sin(\pi) = 0$
- $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$

Démonstration pour $x = \pi/3$:

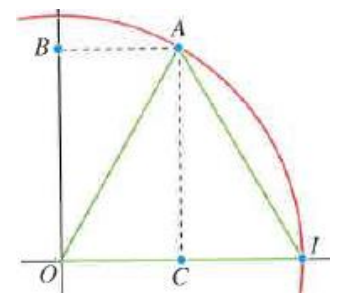
- Soit A le point image de $\pi/3$ sur le cercle trigonométrique.
- Le triangle AOI est équilatéral car $OA = OI = 1$ et $\widehat{AOI} = 60^\circ$
- Dans un triangle équilatéral, hauteurs et médianes sont confondus.

L'abscisse du point A est égal à la moitié de $OI = 1$: $\cos(\pi/3) = OC = \frac{1}{2}$

- Le triangle OAC est rectangle en C . D'après le théorème de Pythagore on a :

$$OC^2 + AC^2 = OA^2 \text{ d'où } \left(\frac{1}{2}\right)^2 + AC^2 = 1^2 \text{ d'où } \frac{1}{4} + AC^2 = 1 \text{ d'où } AC^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ d'où } AC = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'ordonnée de A est égal à $OB = AC$: $\sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ □

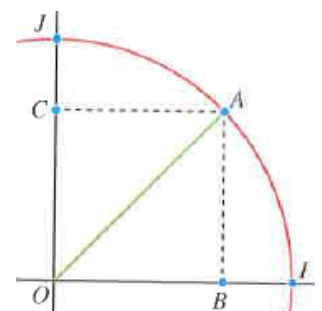


Démonstration pour $x = \pi/4$:

- Soit A le point image de $\pi/4$ sur le cercle trigonométrique.
- Le triangle AOB est rectangle isocèle en B :
 \widehat{ABO} est un angle droit et $\widehat{AOB} = 45^\circ$ donc $\widehat{OAB} = 45^\circ$ ($\hat{A} + \hat{B} + \hat{O} = 180^\circ$)
- D'après le théorème de Pythagore, et comme $OB = AB$ on a :

$$OB^2 + AB^2 = OA^2 \text{ d'où } 2 AB^2 = 1^2 \text{ d'où } AB^2 = \frac{1}{2} \text{ d'où } AB = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- L'abscisse et l'ordonnée de A sont égal à $OB = OC = AB$: $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ □



2 – Propriétés du cosinus et du sinus

Propriété 1 : Pour tout réel x , on a : $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$

Démonstration : Les points du cercle trigonométrique ont une abscisse/ordonnée comprise entre -1 et 1 .

Propriété 2 : Pour tout réel x , on a $\cos(x + k2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + k2\pi) = \sin(x)$, pour k entier.

Démonstration : Les nombres x et $x + k2\pi$ sont associés au même point du cercle trigonométrique.

Propriété 3 : Pour tout réel x , on a $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$.

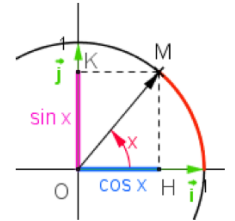
Démonstration : Soit x un nombre réel et M le point du cercle qui lui est associé.

Dans le repère $(O; I; J)$ le point M a pour coordonnées $M(\cos(x); \sin(x))$

Plaçons le point $H(\cos(x); 0)$. Le triangle OHM est donc rectangle en H .

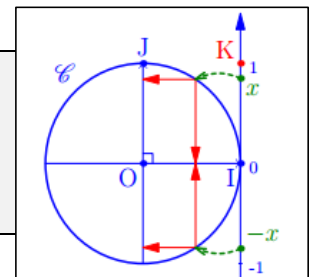
On a $OH = \cos(x)$; $HM = \sin(x)$ et $OM = 1$ (c'est le rayon du cercle trigonométrique)

D'après le théorème de Pythagore on a $OH^2 + HM^2 = OM^2$ c'est-à-dire $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$.



Propriété 4 : Pour tout réel x , on a les formules suivantes :

- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$



Exemple 1 :

- $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

3 – Lien avec le cosinus/sinus dans un triangle rectangle

La définition du cosinus et du sinus via le cercle trigonométrique permet de définir $\cos(x)$ et $\sin(x)$ pour n'importe quel nombre réel x . Cette définition est cohérente prolonge la définition du cosinus et du sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle :

Soit x un nombre réel compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$

On se place dans le triangle rectangle OHM .

x est alors la mesure en radian de l'angle \widehat{HOM}

- $\cos(\widehat{HOM}) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}} = \frac{OH}{OM} = \frac{OH}{1} = OH = \cos(x)$
- $\sin(\widehat{HOM}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}} = \frac{MH}{OM} = \frac{MH}{1} = MH = \sin(x)$

