Fiche G1.3 : Fonctions cosinus et sinus

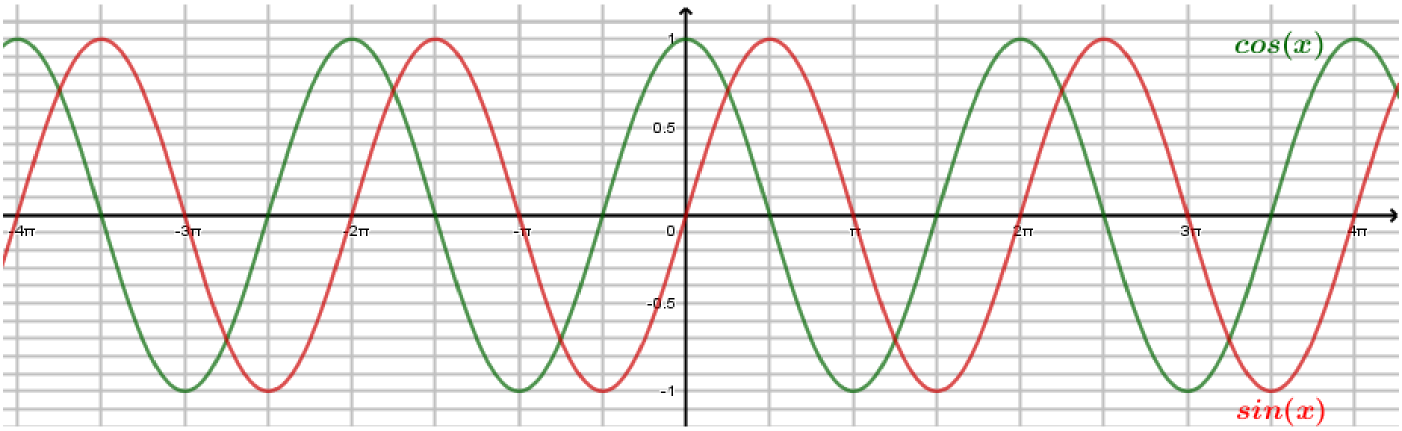
1 – Définitions et courbes représentatives

Définition 1 :

• On appelle **fonction cosinus** la fonction qui à chaque nombre réel x associe son cosinus $\cos(x)$.

• On appelle **fonction sinus** la fonction qui à chaque nombre réel x associe son sinus $\sin(x)$.

Courbe représentative :



2 – Propriétés des fonctions trigonométriques

Propriété 1 : Les fonctions cosinus et sinus sont **bornées** entre -1 et 1 :

Pour tout réel x, on a $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.

Propriété 2 :

• La fonction cosinus est **paire** : Pour tout réel x, on a $\cos(-x) = \cos(x)$.

Sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

• La fonction sinus est **impaire** : Pour tout réel x, on a $\sin(-x) = -\sin(x)$.

Sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Propriété 3 : Les fonctions cosinus et sinus sont **2π-périodiques** :

Pour tout entier k, pour tout réel x, on a $\cos(x + k2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + k2\pi) = \sin(x)$.

Remarque : Les courbes des fonctions trigonométriques sont la répétition à l'infini d'un même « motif » de courbe de taille 2π. On dit que 2π est la **période** de la fonction.

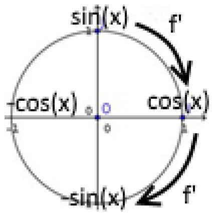
3 – Dérivation des fonctions trigonométriques

Propriété 4 : Les fonctions trigonométriques sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

• La dérivée de la fonction cosinus $f(x) = \cos(x)$ est égale à $f'(x) = -\sin(x)$.

• La dérivée de la fonction sinus $f(x) = \sin(x)$ est égale à $f'(x) = \cos(x)$

Moyen mnémotechnique : Pour se souvenir des formules on pourra retenir la figure suivante.



Propriété 4 : Soit u une fonction dérivable sur I.

• Les fonctions de la forme $f = \cos\ u$ sont dérivables sur I et on a : $f' = -u' \times \sin u$.

• Les fonctions de la forme $f = \sin\ u$ sont dérivables sur I et on a : $f' = u' \times \cos u$.

Exemple 1 : Dériver les fonctions suivantes

• $f(x) = \cos(3x + 5)$: On a $f = \cos u$ avec $\begin{cases} u = 3x + 5 \\ u' = 3 \end{cases}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a $f' = -u' \sin(u)$. On obtient $f'(x) = -3\sin(3x + 5)$

• $g(x) = \sin(x^2 - 3)$: On a $g = \cos u$ avec $\begin{cases} u = x^2 - 3 \\ u' = 2x \end{cases}$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a $g' = u' \cos(u)$. On obtient $g'(x) = 2x\cos(x^2 - 3)$