Fiche ___ : Définitions du produit scalaire

1 – Définition avec le cosinus

Notations : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

• On appelle **norme** de $\vec{u}$, et on note $||\vec{u}||$, la longueur du vecteur $\vec{u}$.

Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (*Fig 1*) .

• On note $(\vec{u}; \vec{v})$ l'angle formé par les veceurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (*Fig 2*) :

Soient A, B et C tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ alors $(\vec{u}; \vec{v}) = \widehat{BAC}$.

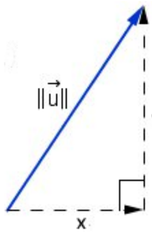


Figure 1

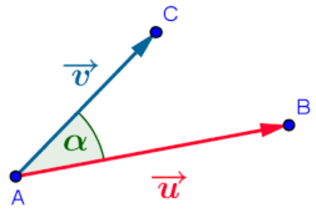


Figure 2

Définition 1 :

Remarques :

• Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ alors on obtient $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.

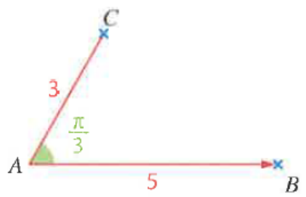
• L'opération $\vec{u}.\vec{v}$ est appelée « produit scalaire » car on multiplie deux vecteurs pour obtenir un **nombre**.

• En physique, le **travail** W d'une force $\vec{F}$ lors d'un déplacement rectiligne $\overrightarrow{AB}$ est le produit scalaire $\vec{F}.\overrightarrow{AB}$

Il s'agit de l'energie (exprimé en Joules) fournie par la force $\vec{F}$ au cours du déplacement $\overrightarrow{AB}$.

Exemple 1 : On considère A, B et C trois points distincts tel que :

$AB = 5$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}(60°)$. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$



Cas particuliers :

• Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires :

. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont le même sens alors $\alpha = (\vec{u}; \vec{v}) =$ __ et donc $\cos(\alpha) =$ __.

On obtient donc $\vec{u}.\vec{v} =$ _______________

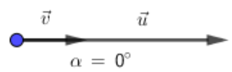


Figure 3

. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont un sens contraire alors $\alpha = (\vec{u}; \vec{v}) =$ ________ et donc $\cos(\alpha) =$ ____ .

On obtient donc $\vec{u}.\vec{v} =$ _______________

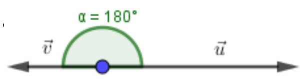


Figure 4

• Le produit scalaire de $\vec{u}$ avec lui-même est appelée **carré scalaire** de $\vec{u}$ et noté $\vec{u}^2$

$\vec{u}^2 =$ ____ .

• Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **orthogonaux** si $\vec{u}.\vec{v} = 0$. C'est le cas lorsque :

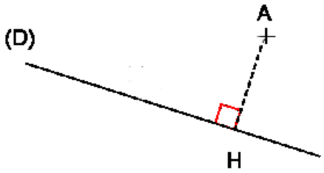
. L'un des deux vecteurs est nul. Le vecteur nul $\vec{0}$ est donc orthogonal à tout vecteur.

. $\cos(\vec{u}; \vec{v}) =$ __ donc si $\alpha = (\vec{u}; \vec{v}) =$ _______ c'est-à-dire si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont des directions _______________.

Figure 5

2 – Définition avec le projeté orthogonal

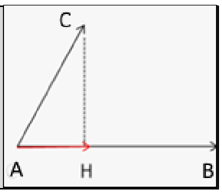
Rappel : Soit un point A et une droite (D).



- On appelle **projeté orthogonal** de A sur (D), le point H tel que $(AH) \perp (D)$.
- C'est le point M de la droite (D) le **plus proche** de A.
- La distance AH est alors appelée **distance du point A à la droite (D)**.

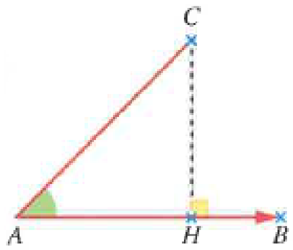
  Elle est notée $d(A,(D))$

Définition 2 :



Remarque : On doit vérifier que les deux définitions du produit scalaire données sont **équivalentes.**

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont dans le **même sens.**



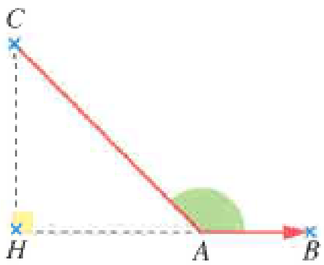
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} =$ ____________________________

Or le triangle AHC est rectangle en H donc on a :

$\cos(\widehat{BAC}) =$ ________________________________

On obtient $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} =$ __________________________

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont dans le **sens contraire.**



$\widehat{BAC} =$ ___________ donc $\cos(\widehat{BAC}) =$ __________

On a donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} =$ ____________________________

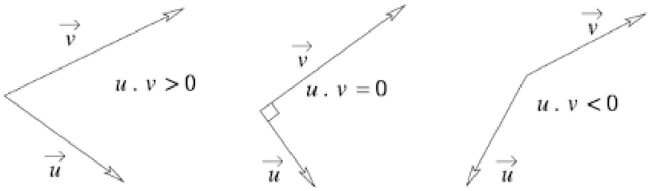
Or le triangle AHC est rectangle en H donc on a :

$\cos(\widehat{CAH}) =$ __________________________________

On obtient $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$________________________________

Remarques :

- Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires, on obtient dans les deux cas, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$.
- Le signe du produit scalaire donne la nature l'angle : aigu, obtu ou droit.



Exemple 2 : Calculer le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.